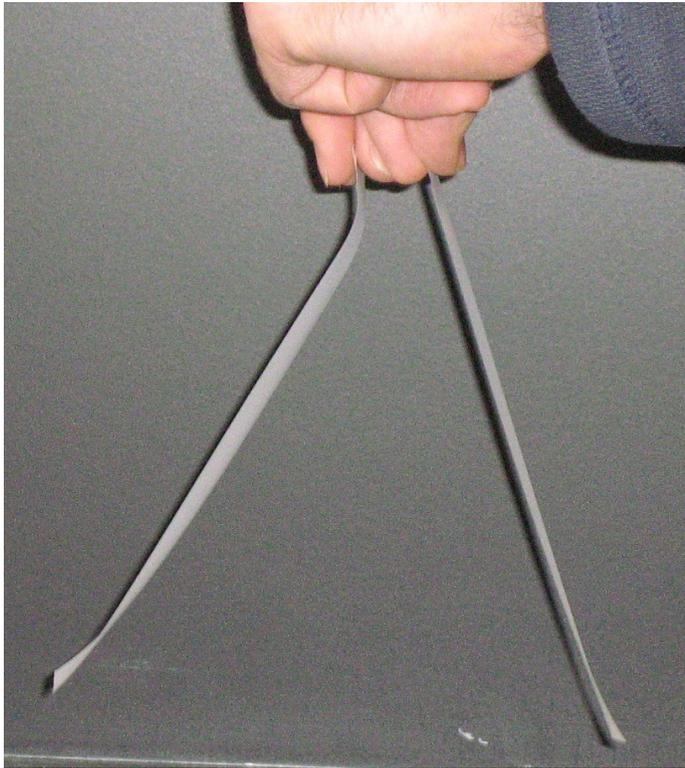


電磁気学

遠隔作用？近接作用？



摩擦電気



磁鉄鋼

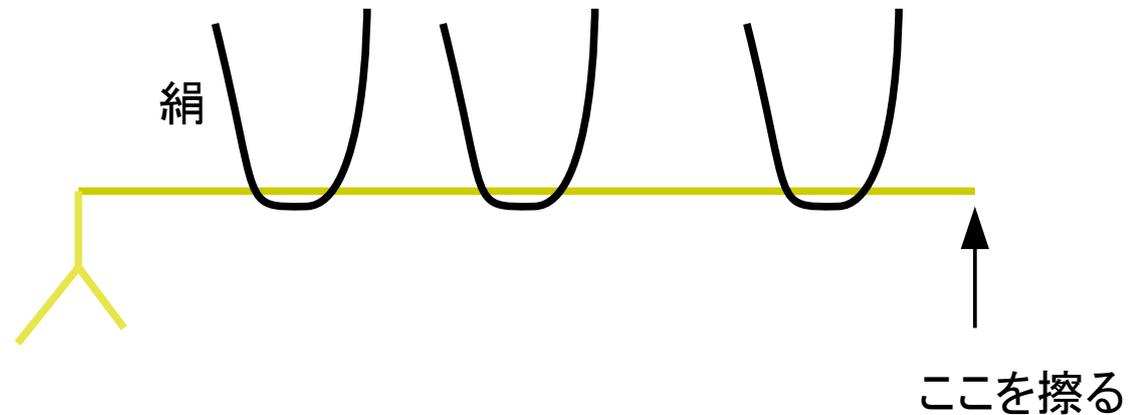
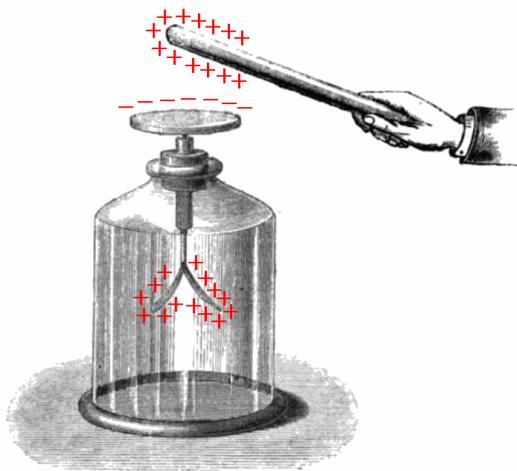
紀元前2世紀か紀元後11世紀の中国で、磁石が南北を指すことが知られる。

磁気と電気は違う

- ギルバートは1600年,摩擦電気と磁気は違うことを確かめた。
 - 琥珀(ギリシア語:elektron)でこすったものは、引力や斥力を及ぼすようになる。この力をelectric force(英語で電気力のこと)と呼んだ。
 - 磁石は南北をさすが、電気力は南北を指さない。
 - 磁石は折っても同じ強さの二つの磁石になるが、電気力は折ると半分になる。
 - 磁力は加熱すると失われるが、電気力は失われない。
 - 地球は大きな磁石である。

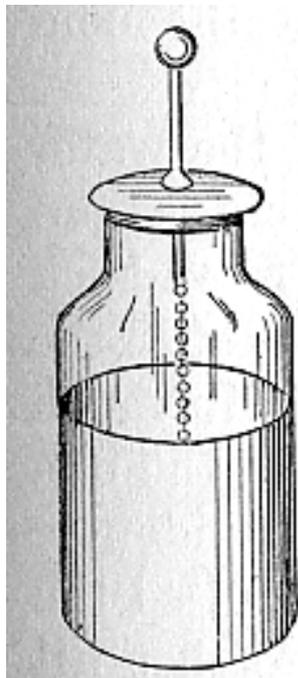
電気伝導

- 1729年、グレイが電気伝導を発見。
 - 金属は電気を通す。(導体)
 - 絹などは電気を通さない。(不導体・絶縁体)
 - 地面も電気を通す。
 - 電気は2種類あるらしい。



ライデン瓶

- 1746年、ミュッセンブルークが発明した電気をためることができる瓶。(オランダのライデン大学で作られた。)
- 原理は電気コンデンサーの原型



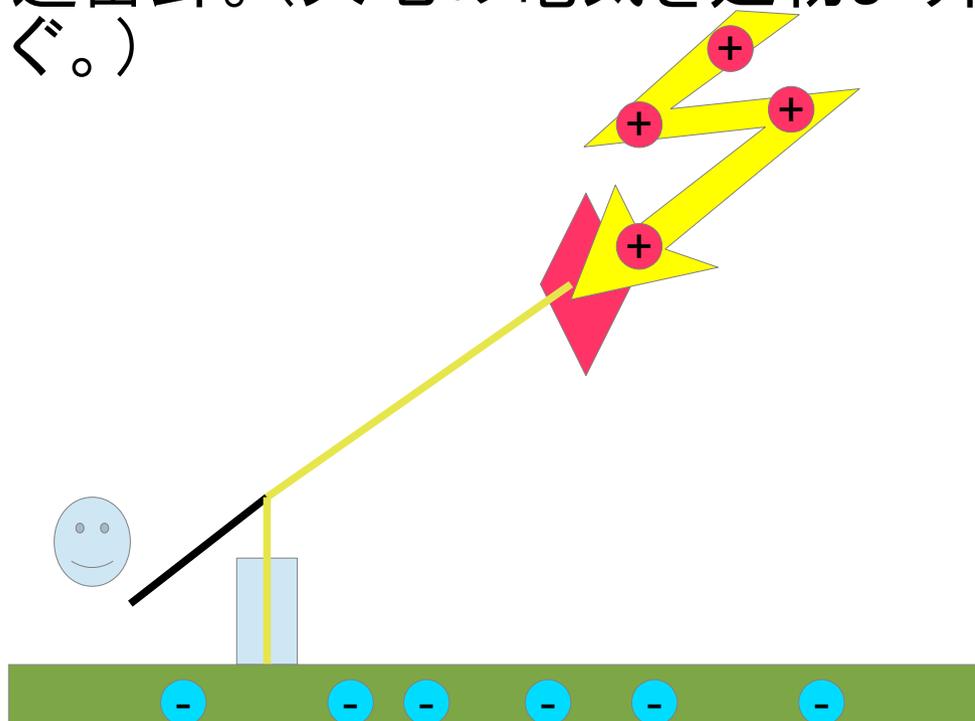
瓶の外側には金属がめっきしてある。



平賀源内のエレキテル

電気には正と負がある。

- ベンジャミン・フランクリンは雷が電気であることを証明した。
 - 2種の電気ではなく、正と負の状態があることを発見。
 - 雷の電気が反対。
 - 大地が雲と反対の極になるから、雷が起きる。
 - 避雷針。(大地の電気を建物より高いところへ運び落雷を防ぐ。)



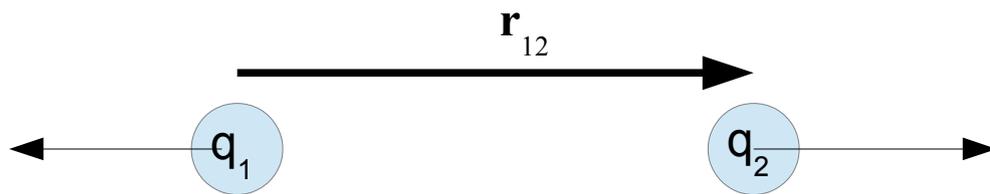
米ドル札のベンジャミン・フランクリン

クーロンの法則

- 1785年、クーロン(Coulomb)がねじり天秤の実験で、電気力は重力と同じく距離の逆二乗であることを発見。

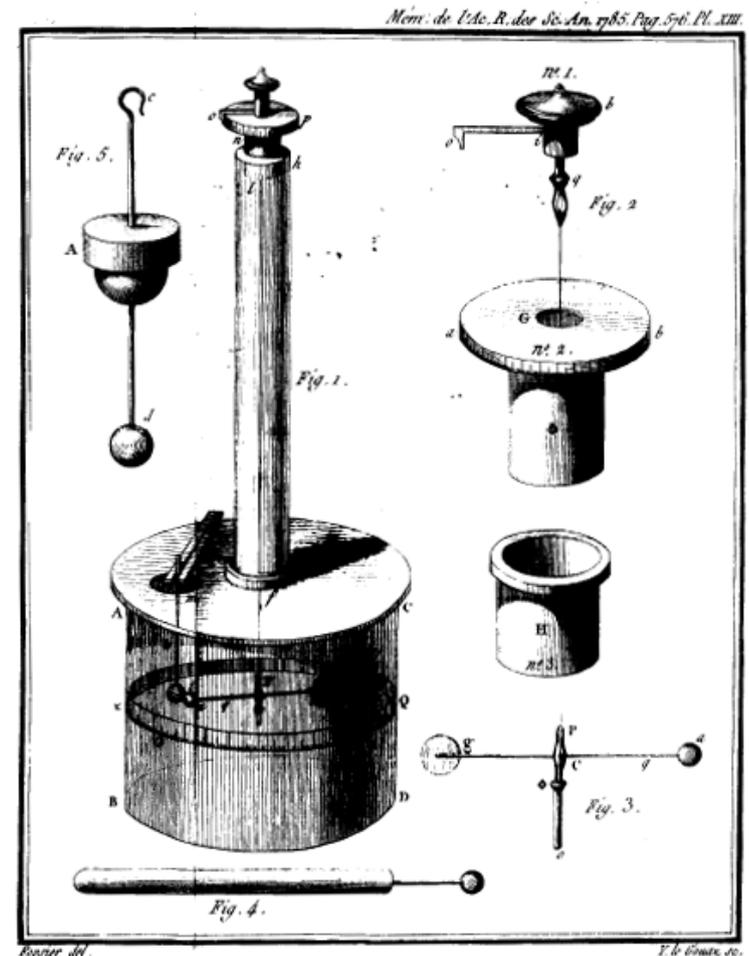
$$\mathbf{F} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|}$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$



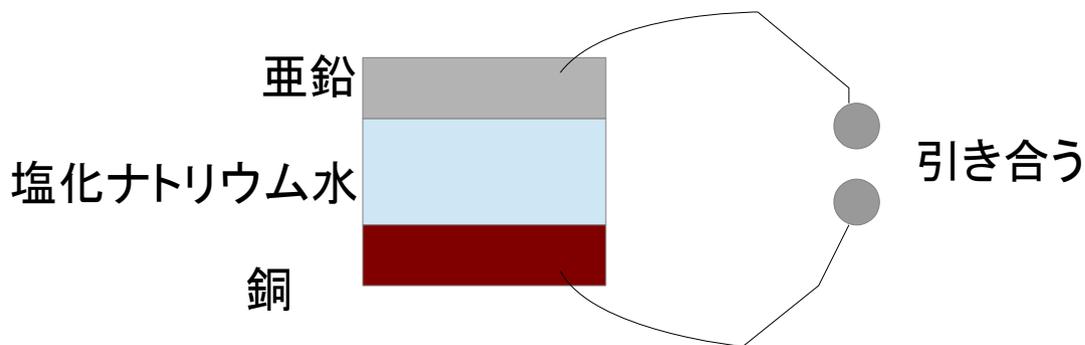
ϵ_0 : 真空の誘電率

q: 電荷量 (単位 A·s = C クーロン)



電池と電流

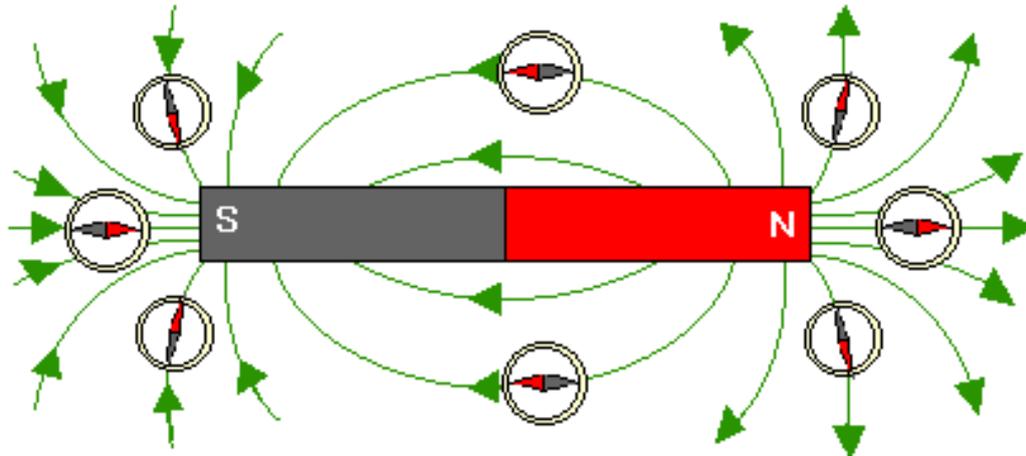
- 1780年,ガルバーニはカエルの解剖中に2種の金属をつなぐと電気が流れ、カエルの足が動くことを発見(動物電気)
- 1800年、ボルタは動物電気を否定するために、食塩水に2種類の金属をあてると電気と電流が発生することをしめた。
 - 電流量は金属の種類を変えると変わる。金属種に対応する量に電位と名づけた。(電位の単位 V ボルト)
 - 電圧は2種の金属の電位の差



電流と磁気

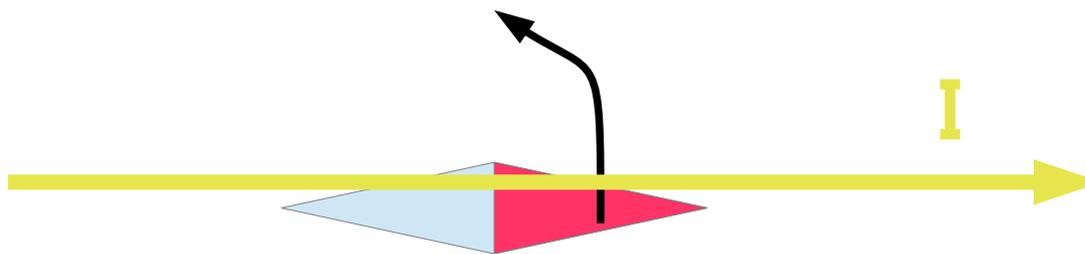
- 1820年、エルステッドが電流の流れる銅線の周りで、方位磁針の針が動くことを発見。

磁力線 → 磁場 $H(r)$



磁場強さの単位
(Oe エルステッド
=1000/(4 π) A/m)

磁力線は必ず閉じる



北極

アンペールの法則(右ねじの法則)

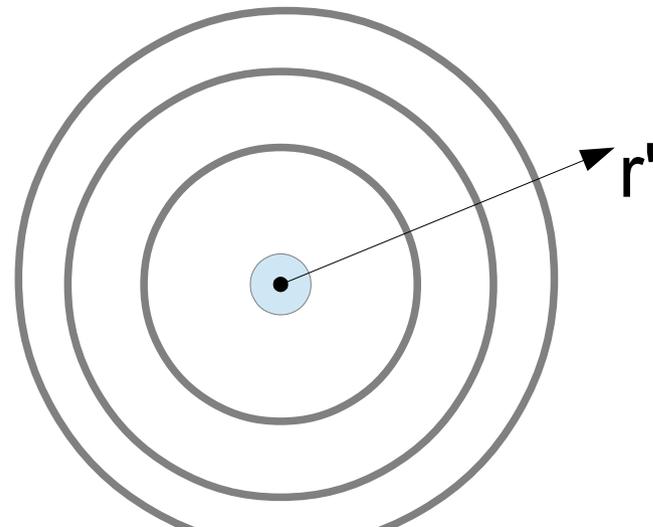
- 同年、エルステッドの報告を受けて、アンペールとビオが、電流と力の関係を導出。

ビオ・サバールの法則

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}'}{4\pi r'^2}$$

アンペールの法則

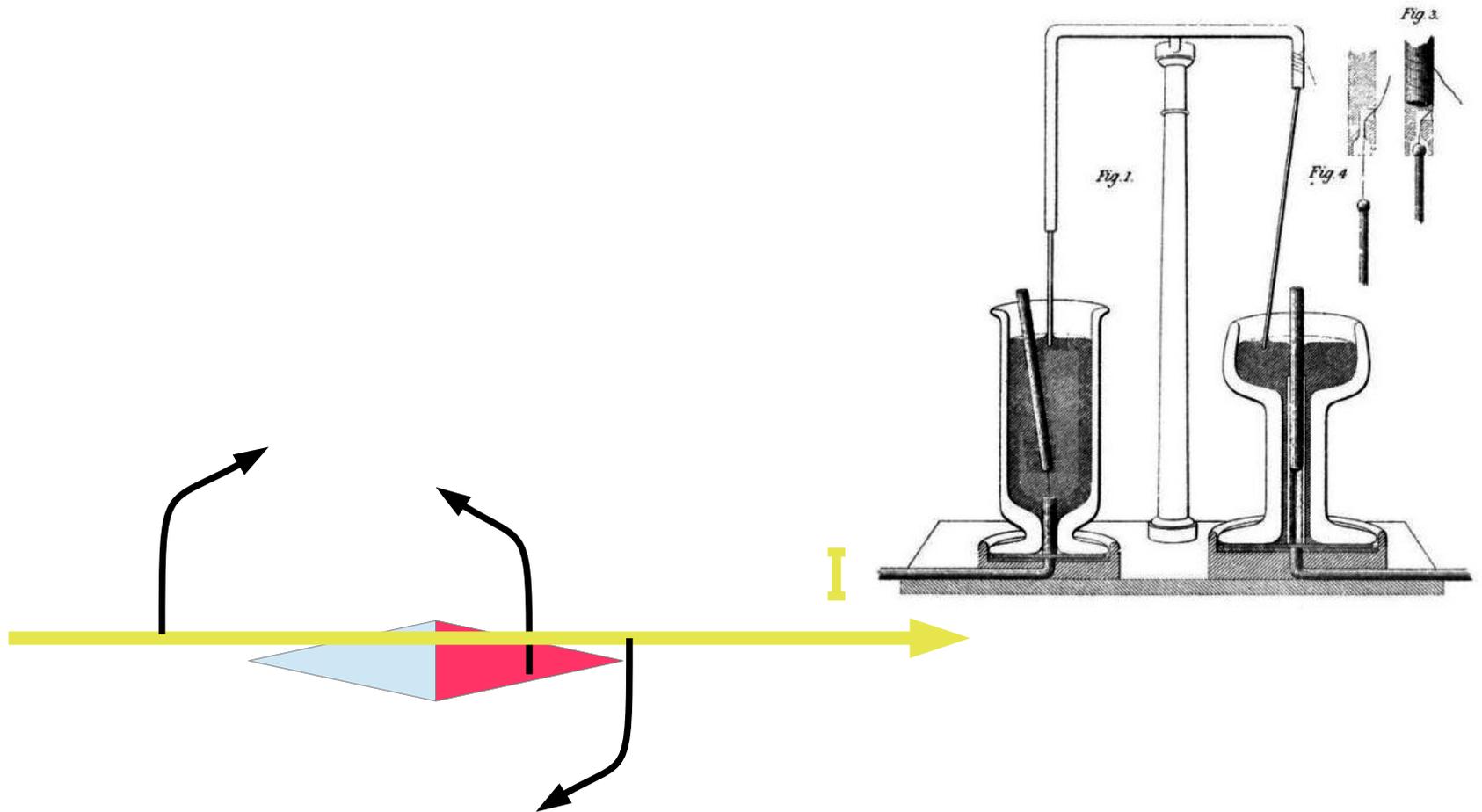
$$H = \frac{I}{2\pi r'}$$



右ねじ
の方向

磁場からの反作用

- 1821年、ファラデーは電流による磁場の反作用を発見。(電磁回転)



電気抵抗と電圧

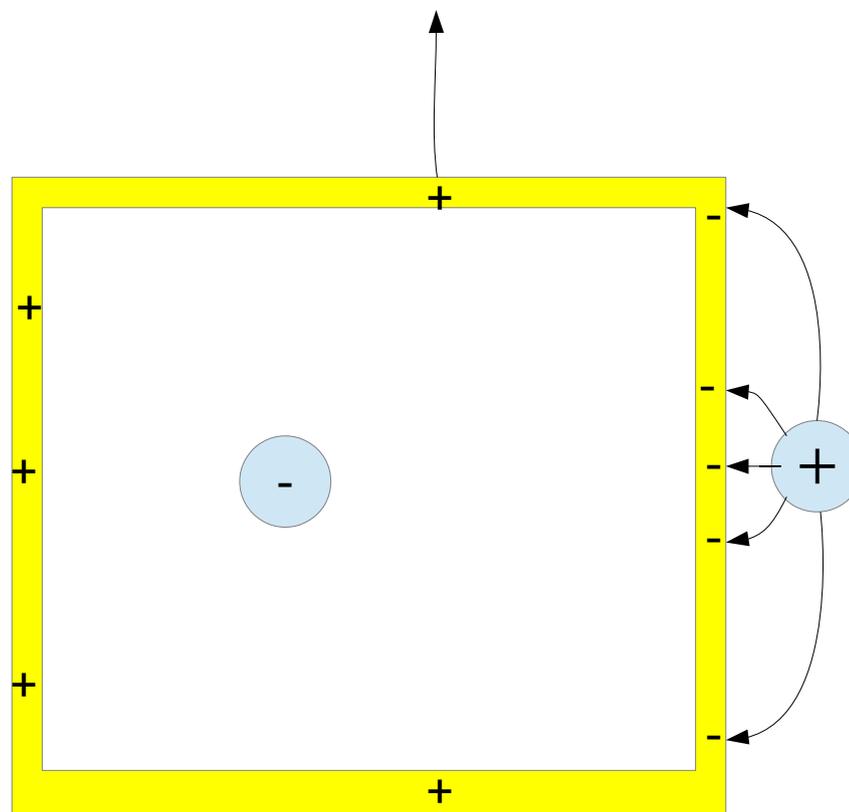
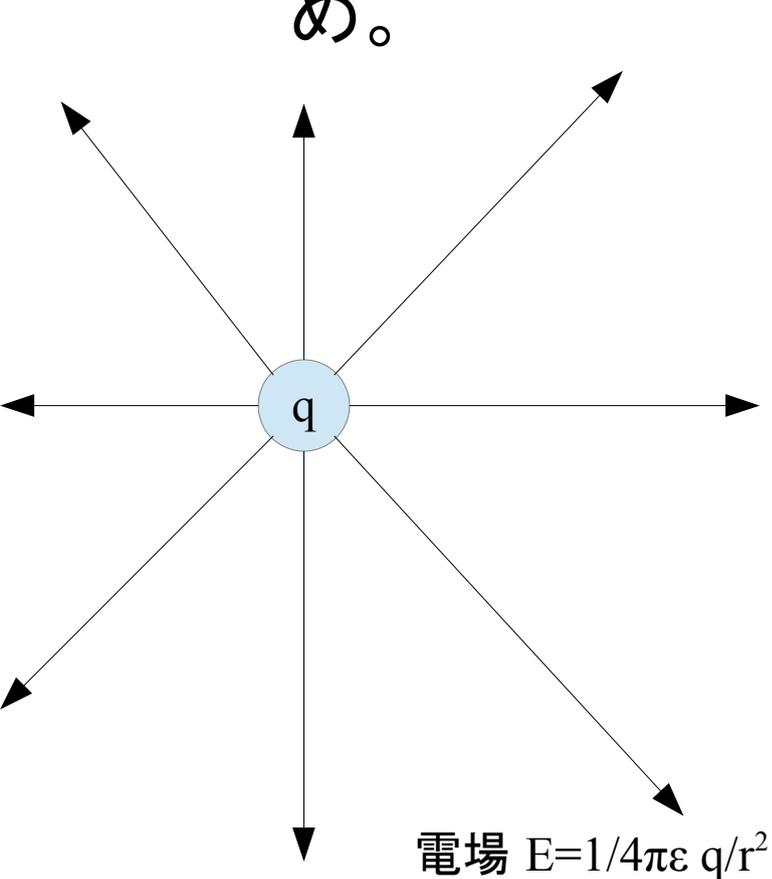
- 1826年、オームが電気抵抗が直列つなぎで加算されると仮定して、抵抗と電流と電圧の関係を導出

$$E = RI$$

静電誘導と電気力線

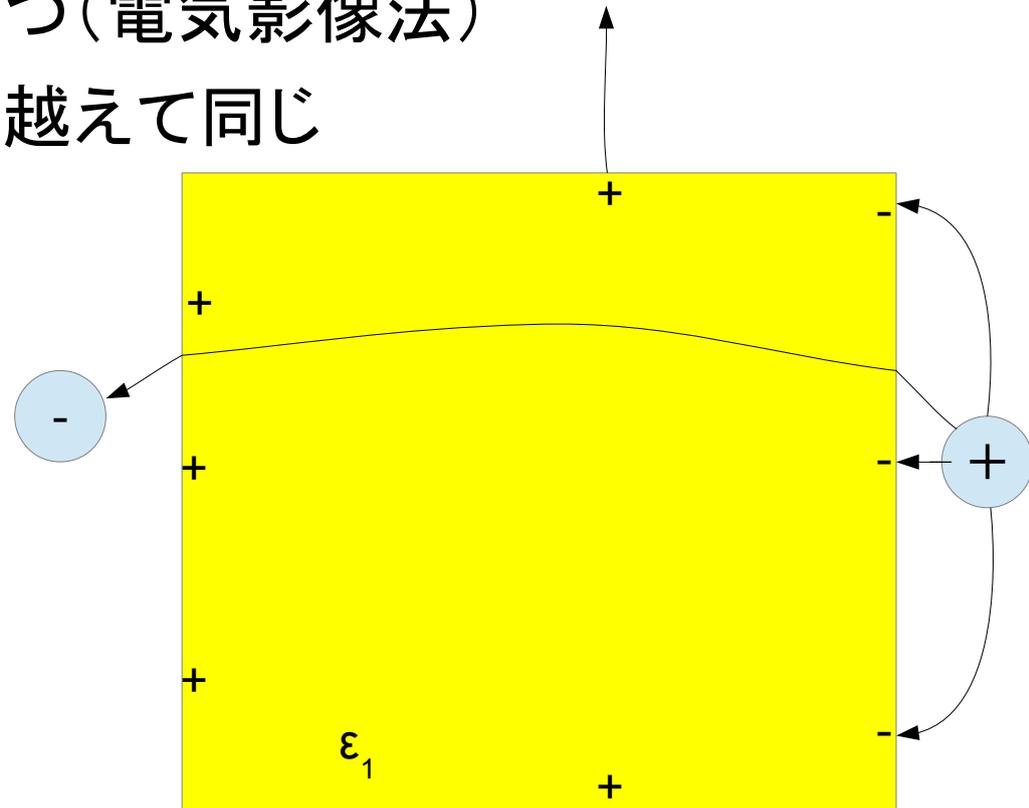
- ファラデーのかご

- 金属でできたかごの中には、電場が伝わらない。
- 電気力線にそって電荷が流れ、電気力線を打ち消すため。



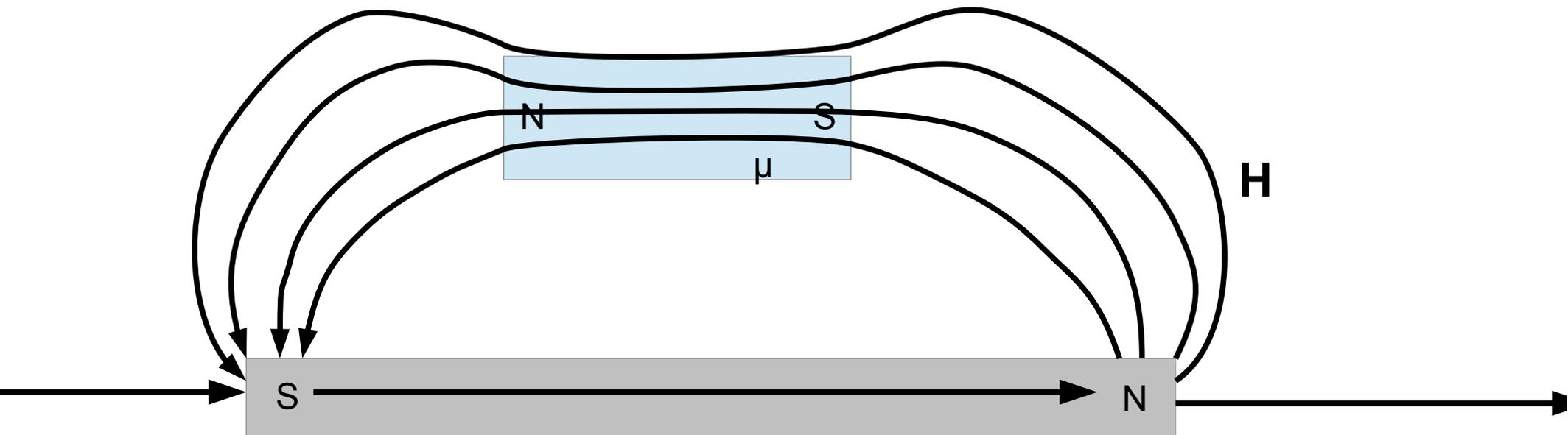
誘電体と電束密度

- 絶縁体は電荷は流れないが、静電誘導により、表面電荷が発生し、誘電体内では電場が弱まる。
 - 誘電率 ϵ (真空が一番小さい)
 - 電気力線は誘電率で屈折する。
 - フェルマーの原理が成り立つ(電気映像法)
 - 電束密度 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ は、境界を越えて同じ



透磁率と磁束密度

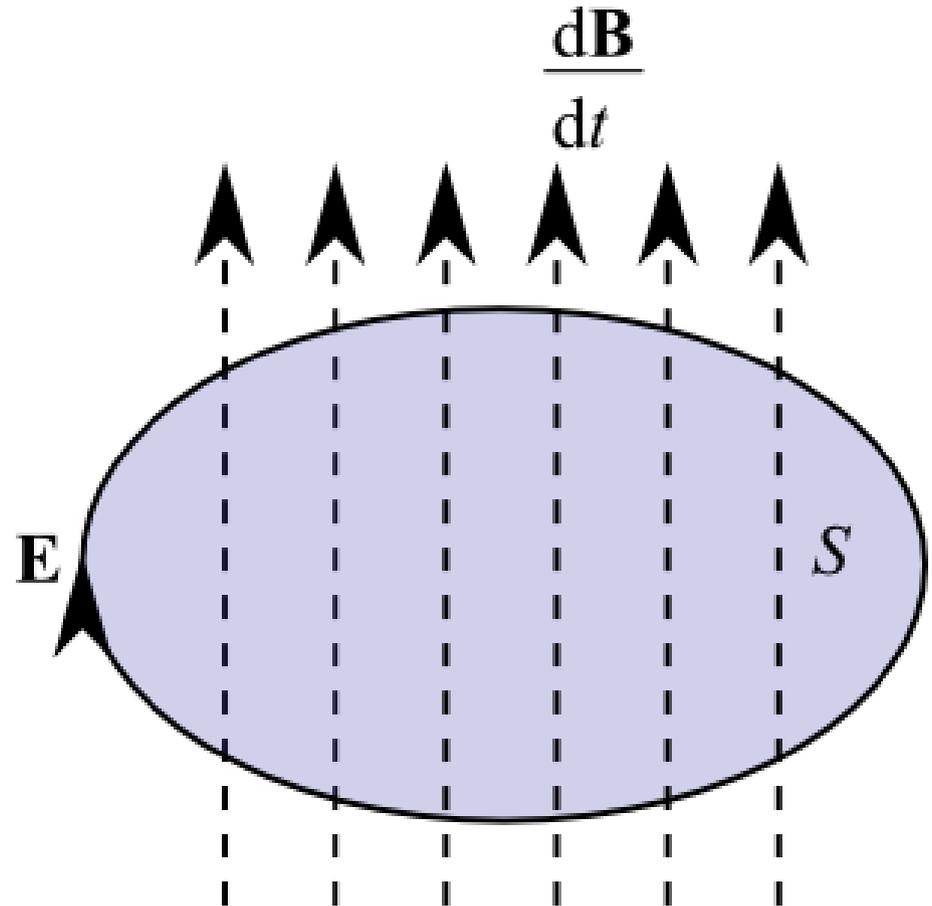
- 電気力線に誘電率があるなら、磁力線にも透磁率がある。
 - 誘電率には負はないが、透磁率には負がある。(反磁性)
 - 磁束密度 $B=\mu H$ は境界法線方向に一定。
 - 必ず閉じる曲線である以外は、電気力線と同じく扱える。



電磁誘導

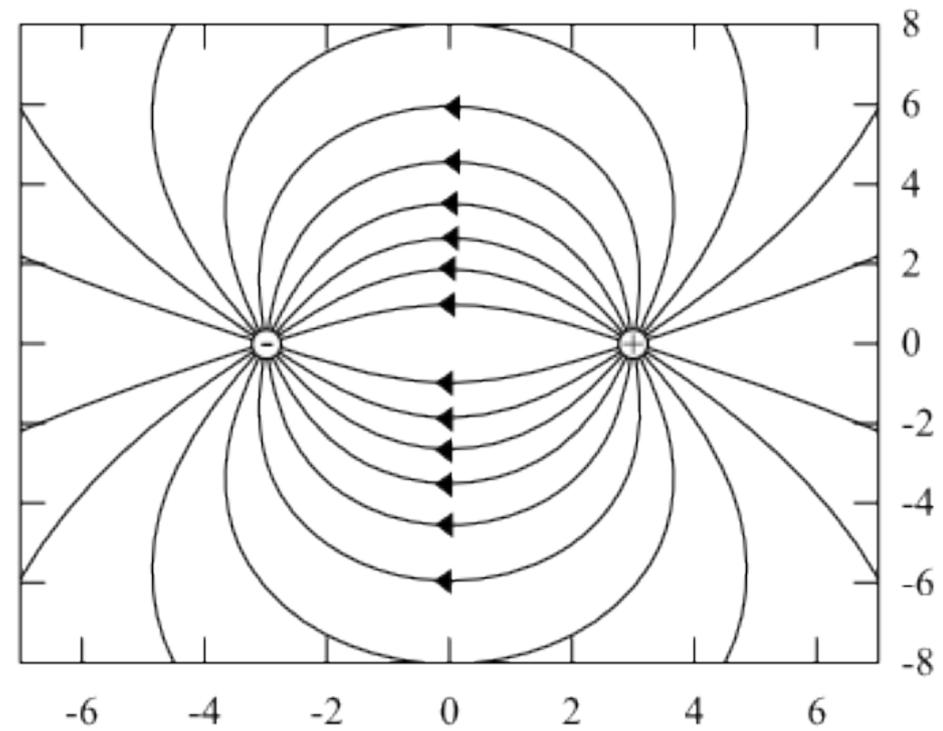
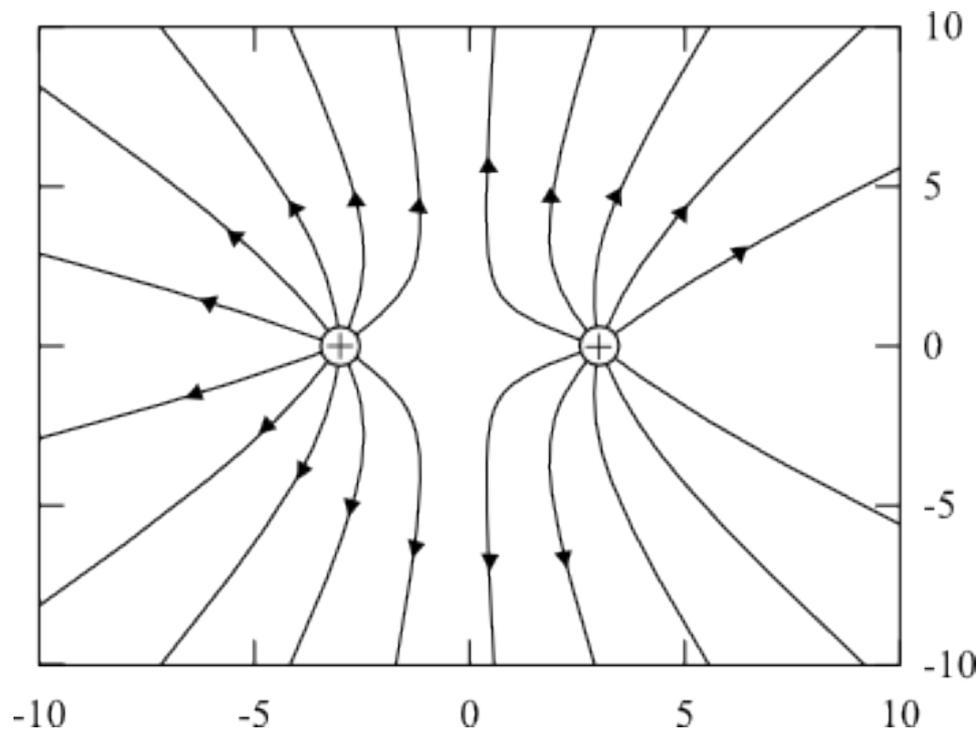
- 電流に対して磁力線が誘発されるように、磁束密度の時間変化に対して、電場が誘起される。

$$V = - \frac{d\Phi}{dt}$$
$$\oint_S \mathbf{E} dl = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} dS$$



電磁気力学

- ファラデーの近接相互作用論
 - 電荷は遠隔相互作用ではなく、電気力線を作るだけ。
 - 電離力線が力を伝えている？



ガウスの法則

- ガウスは電気力線に幾何学的な意味を与えた。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$$

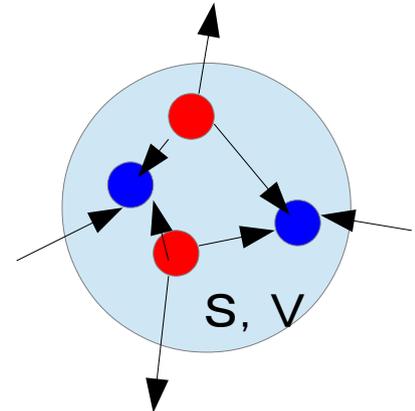
- ガウス-マクスウェルの式

$$\Delta D_x dy dz + \Delta D_y dy dx + \Delta D_z dx dy = \rho dx dy dz$$

$$\frac{dD_x}{dx} + \frac{dD_y}{dy} + \frac{dD_z}{dz} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$



マクスウェル方程式

- 1864年、マクスウェル方程式の発表

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

ガウスーマクスウェルの式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

アンペールーマクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ファラデーーマクスウェルの式

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

電束密度

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

磁束密度

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

電荷量保存

マクスウェル-アンペール

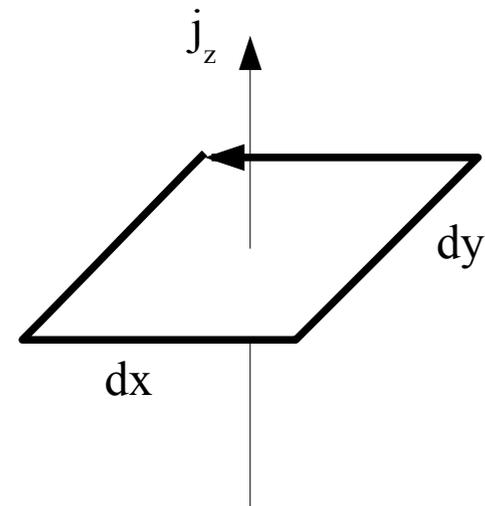
$$H = \frac{I}{2\pi r'}$$

$$\begin{aligned} & H_x(x, y - dy/2, z)dx + H_y(x + dx/2, y, z)dy \\ & - H_x(x, y + dy/2, z)dx - H_y(x - dx/2, y, z)dy \\ & = j_z dx dy \end{aligned}$$

$$+ \frac{dH_y}{dx} - \frac{dH_x}{dy} = j_z$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$



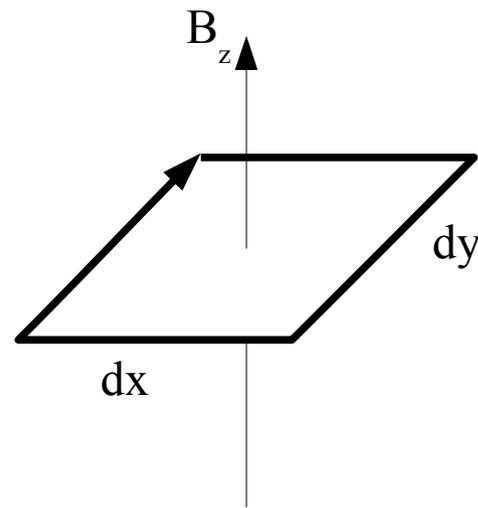
マクスウェル-ファラデー

$$V = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\oint_S \mathbf{E} dl = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} dS$$

$$\begin{aligned} & E_x(x, y - dy/2, z) dx \\ & + E_y(x + dx/2, y, z) dy \\ & - E_x(x, y + dy/2, z) dx \\ & - E_y(x - dx/2, y, z) dy \\ & = - \frac{\partial}{\partial t} B_z dx dy \end{aligned}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



電磁波

- マクスウェル方程式を組み合わせると

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$(\text{grad div} - (\nabla \cdot \nabla))\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$$

$$-(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{1}{\mu\epsilon} (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad \text{波動方程式}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = \frac{1}{\mu\epsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right\} E_x$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

- 磁場も同様に

- $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu\epsilon} (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{H}$$

真空の誘電率

- 8.854×10^{-12} F/m

- 真空の透磁率

- $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

- 真空の光速度

- 299 792 458 m/s

平面波

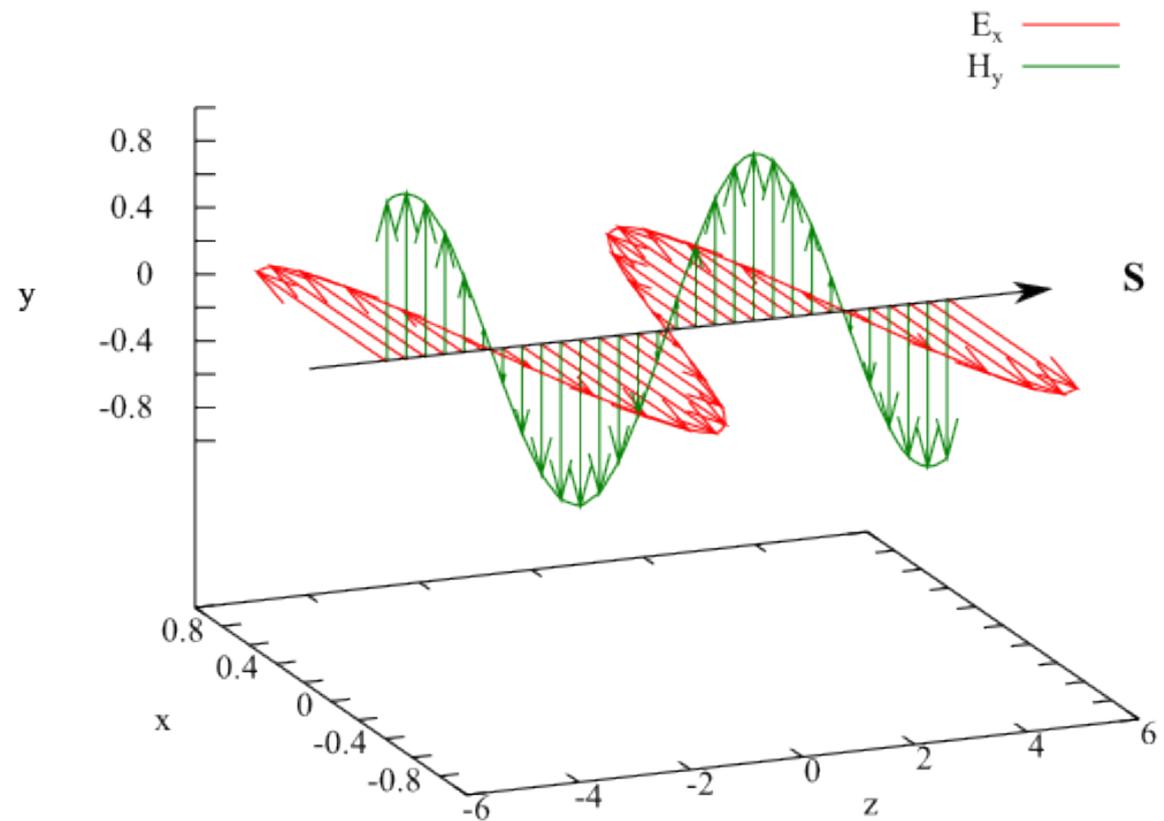
- 一般的に

$$\mathbf{E} = \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\}$$

z方向, x偏光

$$E_x = \exp\{i(kz - \omega t)\}$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x$$



電磁場のエネルギー

- 電荷にじゃなくて、単位体積に以下のエネルギーがある。

$$w = \frac{1}{2}\epsilon\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2$$

マクスウェル応力

- マクスウェル応力テンソル

$$\mathbf{T} = \epsilon \left(\mathbf{E} \circ \mathbf{E} - \delta_{ij} \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) + \mu \left(\mathbf{H} \circ \mathbf{H} - \delta_{ij} \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right)$$

$$= \epsilon \begin{pmatrix} E_x E_x - \frac{E^2}{2} & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y E_y - \frac{E^2}{2} & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z E_z - \frac{E^2}{2} \end{pmatrix}$$

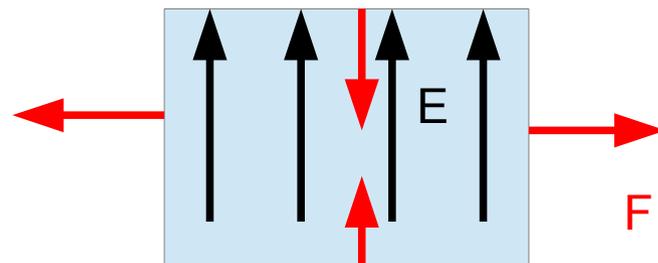
$$+ \mu \begin{pmatrix} H_x H_x - \frac{H^2}{2} & H_x H_y & H_x H_z \\ H_y H_x & H_y H_y - \frac{H^2}{2} & H_y H_z \\ H_z H_x & H_z H_y & H_z H_z - \frac{H^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{T} S$$

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{T} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} S$$

$$F_j = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ij} S_i$$

垂直面(対角成分)に引力,
平行面に斥力(非対角成分)



応力

- 単位面積xy平面に対して、法線ベクトルは(0,0,1)だから

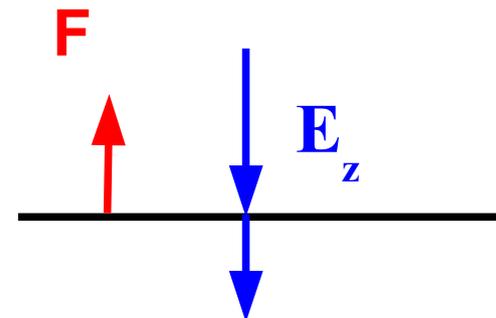
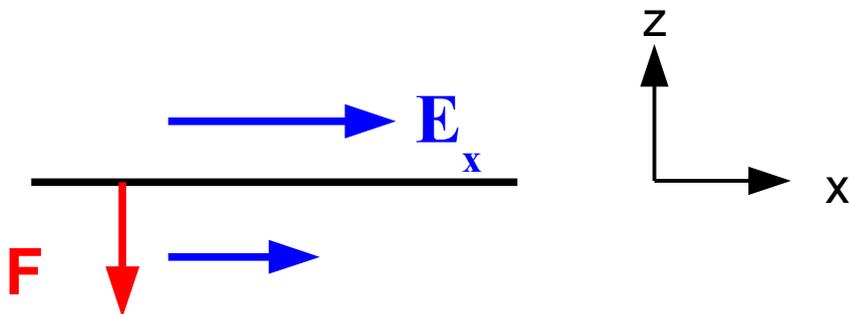
$$\mathbf{F}_z = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \epsilon \begin{pmatrix} E_x E_z \\ E_y E_z \\ \frac{-E_x^2 - E_y^2 + E_z^2}{2} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \begin{pmatrix} H_x H_z \\ H_y H_z \\ \frac{-H_x^2 - H_y^2 + H_z^2}{2} \end{pmatrix}$$

Eのx方向
しかないとき

$$\mathbf{F}_z = \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_x \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Eのz方向
しかないとき

$$\mathbf{F}_z = \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$



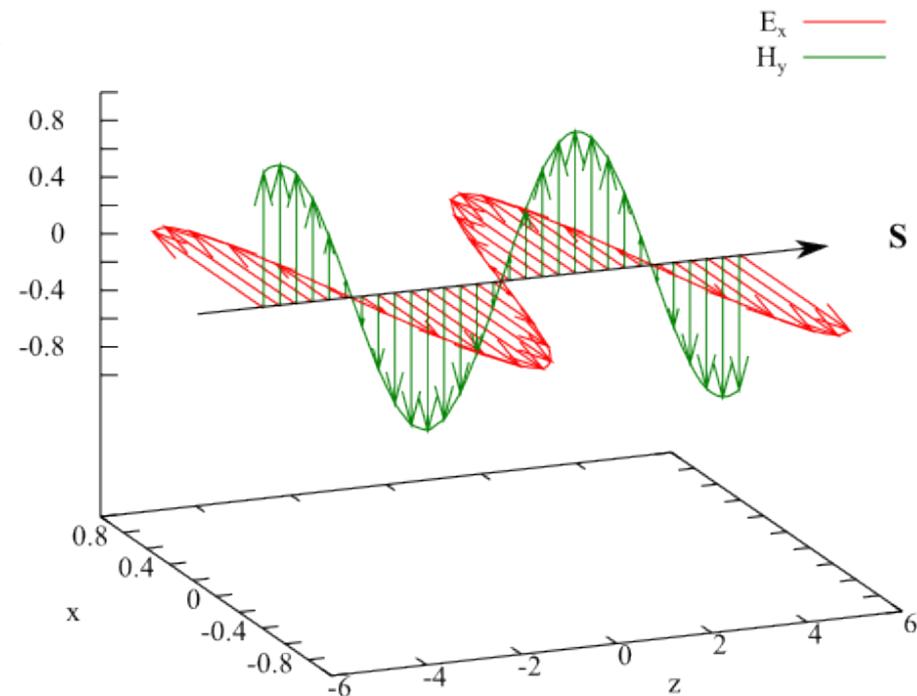
電磁波のエネルギーと運動量

- ポインティング(Poynting)ベクトル

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_z}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial t} \\ &= -\epsilon E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu H_y \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ &= E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(E_x H_y)\end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{S}}{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

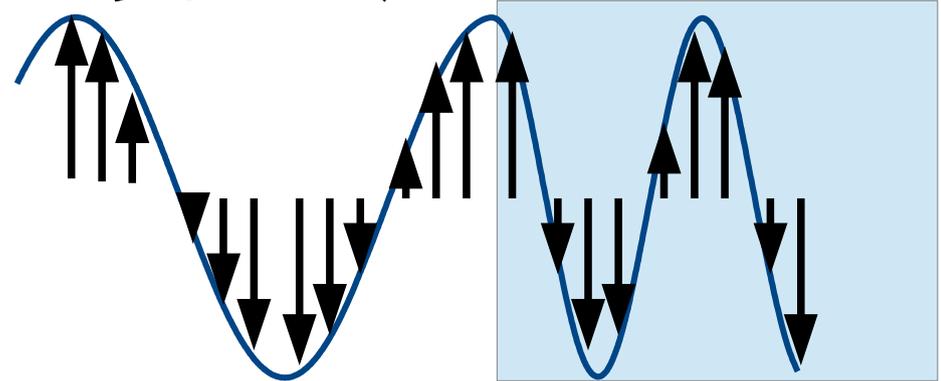


誘電体を押す電磁波

- 平面波z方向がに誘電体があるとき、

境界条件 $E_x(0 - \delta x, y, z) = E_x(0 + \delta x, y, z)$

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \\ v_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon_1 \mu_1}} v_0 \\ \lambda_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon_1 \mu_1}} \lambda_0 \end{cases}$$



$$E_x(x, y, z) = \begin{cases} E_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} + E_2 \exp\{i(-kz - \omega t)\} & (z < 0) \\ E_1 \exp\left\{i\left(\sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_0 \mu_0}} z - \omega t\right)\right\} & (z > 0) \end{cases}$$

E_0 : 入射強度, E_1 : 反射強度, E_2 : 透過強度

$$E_0 + E_2 = E_1 \quad \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(E_0 - E_2) = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_1 \quad \leftarrow H_0 + H_2 = H_1 \quad \text{より}$$

$$E_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_0}{\epsilon_0 \mu_1}}} E_0 < E_0$$

$$E_2 = \frac{1 - \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_0}{\epsilon_0 \mu_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_0}{\epsilon_0 \mu_1}}} E_0 < 0$$

電磁場が押す力

- マクスウェル応力より

$$\begin{aligned} \mathbf{F}/S &= \{\mathbf{T}(x, y, \delta z) - \mathbf{T}(x, y, -\delta z)\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_1 E_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_0 (E_0 + E_2)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_1 E_1^2 - \epsilon_0 E_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\epsilon_1 > \epsilon_0$ なので押している。

