平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第 1 回

はじめに

−背景と準備−

生命医科学部医工学科

2014/4/10

- 力学とは
- 力学に必要な数学の準備
  - 次元
  - スカラーとベクトル
  - 微分と積分
- 近似
- 演習問題 1
- 演習問題 2

■　力学とは

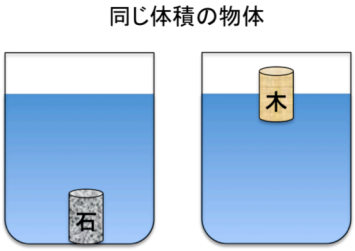
「物理では自然現象を数学的に表現して、その現象の中に普遍性を見いだすこと。」

力学は最も早くから学問として体系づけられ物理の中でも基礎的な学問である。　力学では、「運動する物体に働く力や相互作用について考察し、その運動の振る舞いを記述、説明する」ことを目的とした学問である。

力学の歴史

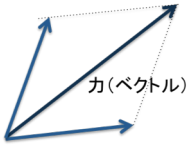
- 古代ギリシャ
  - アルキメデス
    - 浮力の法則（アルキメデスの原理）
    - てこの原理

アルキメデス



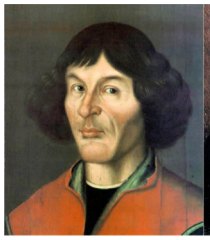
アルキメデスの原理

  - ヒッパルコス
    - 歳差からの春分点の移動の発見
    - 天動説
  - ヘラクレイデス
    - 地動説　（？）



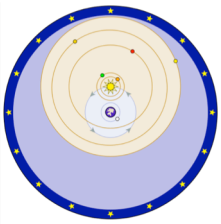
ステヴィン

- 16-17 世紀
  - ステヴィン
    - 釣り合いの原理：力の分解と合成
  - コペルニクスとティコ･ブラーエ、ケプラー
    - 惑星の運動法則
      - 「天体の回転について」（コペルニクス）
      - 天体の観測データと、それを説明するための理論
      - ケプラーの法則

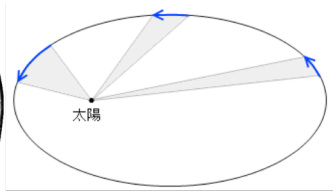


コペルニクス

ティコ･ブラーエ



ティコの考えた太陽系



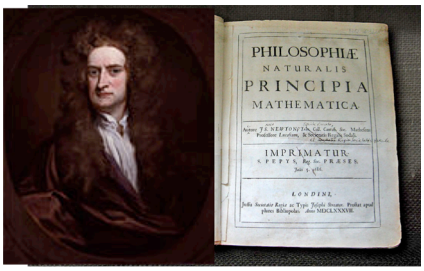
惑星の運動の第2法則

  - ガリレオ
    - 地動説
    - 落体の法則

ガリレオ

ピサの斜塔での落下実験

- ニュートン
  - 遠心力
  - 万有引力の発見
  - 「プリンキピア（自然哲学の数学的原理）」



ニュートン　　プリンキピア

■ 力学に必要な数学の基礎

- 次元：

物理では数学の記述を用いて自然現象を表す。　現象の記述に必要な“値”はすべて、次元を持っている。

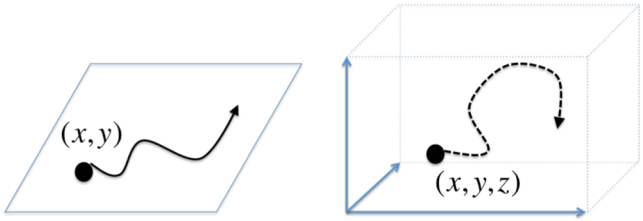


図１　空間次元

- 物理量

物体の運動を表すために必要な数値

例えば、、、、。

物理で、現象を記述するための数式が正しいかどうかを確認するときに、方程式の次元が合っているかどうかは重要。

- スカラーとベクトル
  - スカラー：“大きさ”のみを持つ量
  - ベクトル：“大きさ”と“向き”を持つ**量**

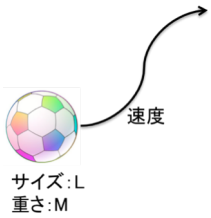


図２.スカラー量とベクトル量

- 微分
  - 数学における定義：差の極限としての定義

ある関数 $f(x)$ について、その関数の微分 $f'(x)$ とは変数xがaから微小量dxだけ変化したとき、関数の変化の割合をに持っていったときの極限の値

$$f'(a) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} \qquad (1)$$

→　すなわち***関数 $f(x)$ の微分とはの関数 $f(x)$ の x での接線の傾き***。（図 3）

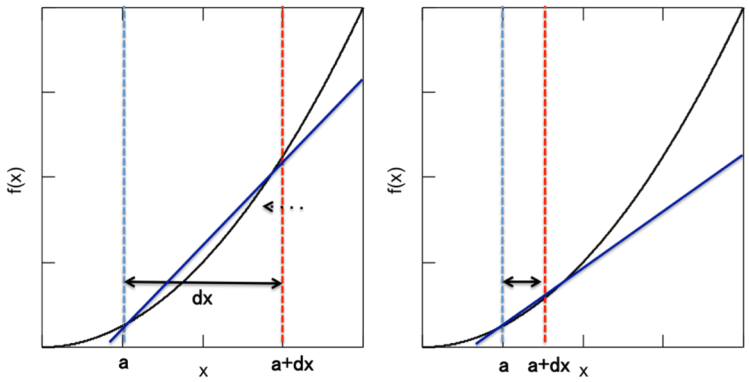


図３．　関数の微分

物理では、現象を記述する場合、物理量の時間変化や空間変化などを関数で表す。例えば、物体の運動の場合、物体の位置が時間の関数で表されるとき、その速度は位置の時間変化として表される。

■　積分

➢　数学における定義：微分の逆の操作関数。和の極限としての定義

ある関数 $f(x)$ について、その変数 x の区間 a から b までの間を幅 dx で分割する。各幅での長方形の面積 $f(x)\times dx$ の値を足し合わせる。(図４)

$$F(x)=\sum_{x=a}^{b} f(x)\cdot dx \qquad (2)$$

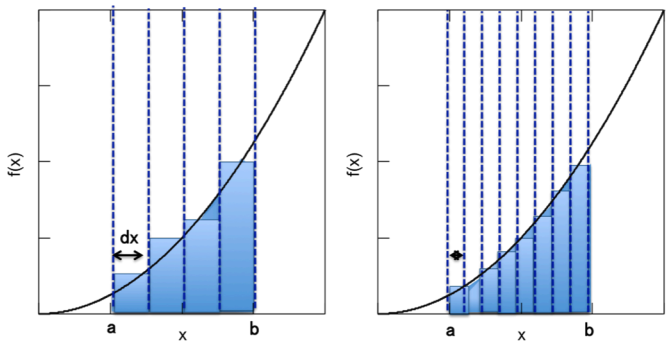


図４．　関数の積分

ここで、$dx\to 0$ にしていったとき（分割数を極限まで大きくする）の極限の値

→ $x-y$ グラフにおいて x の区間 $[a,b]$ と関数 $y=f(x)$ と $y=0$ とで囲まれた間での面積。

$$F(x) = \lim_{dx \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

■　物体の速度

微分と積分の考えを物体の運動に当てはめてみる。簡単の為、1 次元の運動を考える。図 5 のようにある物体が直線上を運動しているとき、

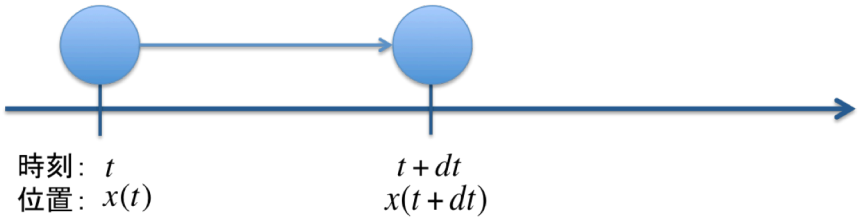


図 5.物体の直線運動

この物体の平均の速度 $\bar{v}$ は,

$$\bar{v} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (4)$$

と定義される．この平均の速度 $\bar{v}$ はある時間間隔Δtで，物体の速度が一定としたものなので，その瞬間瞬間における速度を表わしてはいない．物体の運動を正確に記述するためには，ある瞬間の速度を知る必要がある．ニュートンやライプニッツは，微分をいう考え方と導入することによって，ある瞬間における物体の速度を次のように定義した．

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (5)$$

物体の運動を表すのに使われる、位置，速度，加速度は微分と積分を通して密接な関係がある．その関係を簡単に書くと，次のようになる．

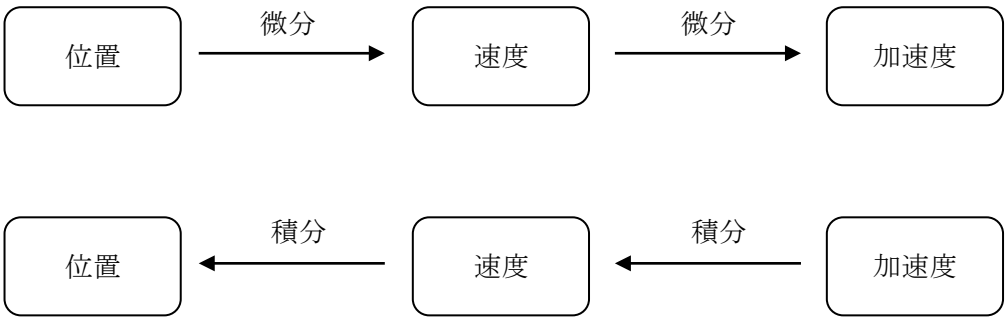


図 6　微分と積分の関係

例えば、加速度（$a = dv/dt = d^2x/dt^2$）が一定で物体が 1 次元で運動しているとする。この場合、この物体の速度、位置の時間変化は

$$v = v_0 + at \qquad (6)$$

$$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \qquad (7)$$

となる．ここで，x_0 は最初の位置，v_0 は初速度である．
式（6）と式（7）を用いる場合の 位置と速度の関係をv（速度）－t（時間）グラフを使って考えてみる．運動している質点の速度vが時間tによって図 7 のように変化したとする．簡単のために，質点は x 軸方向のみ運動するとする．図 7 の ⊡ で示される領域は，平均速度 $\bar{v}_n$ × 時間間隔 Δt_n（m/s × s = m）で表すことができる．この面積は，速度$\bar{v}_n$の質点が Δt_n の間に進んだ距離に相当する．粗い近似ではあるが，時刻 t_1 から t_f の間に質点が進んだ距離 L（変位）は，t_1 から t_f までのすべての長方形の面積を足したものになり，

$$L = \sum_{n=1}^{f} \bar{v}_n \Delta t_n \qquad (8)$$

となる．図 4 のような時間間隔 Δt_n では，近似の精度がよくない．正確な値を求めるためには，$\Delta t_n \to 0$ の極限を考えて，式（8）を次のように書き換える．

$$L = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_{n=1}^{f} v_n \Delta t_n \qquad (9)$$

ここで，式（8）と式（8）を見比べてみると，$\Delta t_n \to 0$ の極限をとったことから，速度が平均の速度$\bar{v}_n$ から瞬間の速度v_n に代わっている．式（9）は，積分記号を使って次のように書くことができる．

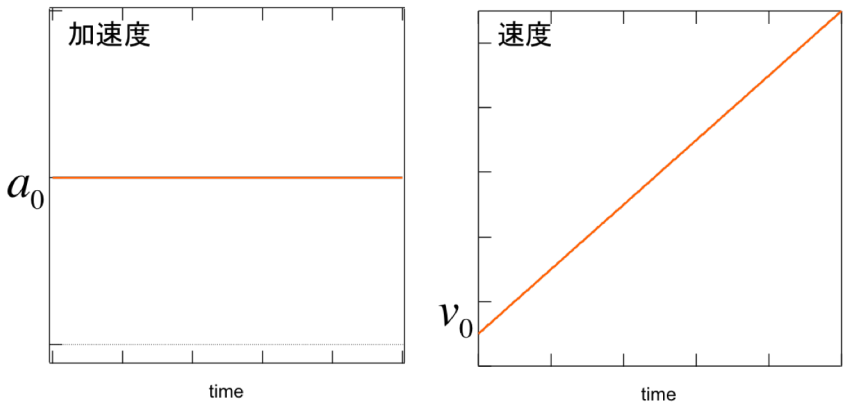


図 7　加速度−速度の時間変化のグラフ

$$L = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_{n=1}^{f} \upsilon_n \Delta t_n = \int_{t_1}^{t_f} \upsilon(t)\, dt \tag{10}$$

ここで，υ(t) は時刻 t における速度である．

速度が一定の場合は，話が簡単になって，図 8 で示されるように進んだ距離は，$\upsilon - t$ グラフの長方形の面積と等しくなる．

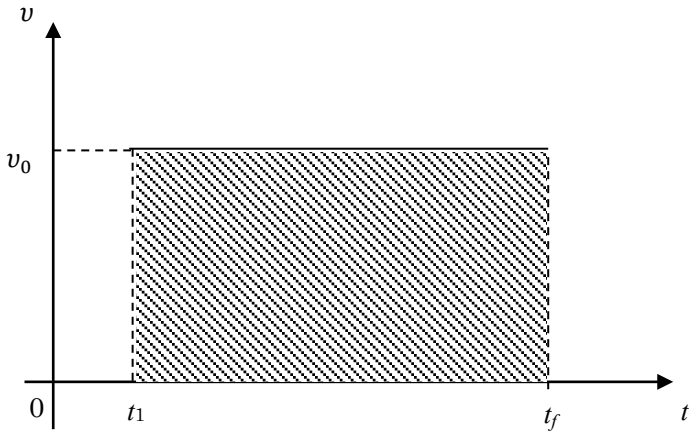


図８　速度一定の場合

速度一定の場合は，

$$\upsilon = \upsilon_0 \tag{11}$$

$$x = x_0 + \upsilon t \tag{12}$$

これは，式（6），（7）において加速度ゼロ（a=0）から導くことができる．

[演習問題 1]

加速度 a（$= dv/dt = d^2x/dt^2$）が一定の物体の運動に対して、加速度を時間に関して積分することによって各時刻での速度と位置を表す関数を導きなさい．ただし，運動は 1 次元の運動とする。時刻 0 では物体は止まっており、原点($x = 0$)にいるものとする。

[演習問題 2]　ゼノンのパラドックス（アキレスとカメ）

アキレスはカメより 10 倍速く走れることにして，カメにハンデとして 100 m 与えるとする（図 6）．アキレスとカメが同時に出発すると，カメが最初にいた位置にアキレスが到達したときに，カメはアキレスの 10 分の 1 の速さであるので，進んだ距離は 10 m となる．さらに，アキレスが 10 m 先にいるカメに追いつこうとして，アキレスが 10 m 進んだときには，カメは 1 m 先にいる．カメはいつもアキレスの進んだ距離の 1/10 だけ進むことになって，いつまで経ってもアキレスはカメに追いつくことができないというのが“アキレスとカメ”のパラドックスである．この条件のときに，アキレスはカメに追いつくことができるか？ただし，アキレスとカメは x 方向の同じ向きに進むとする．

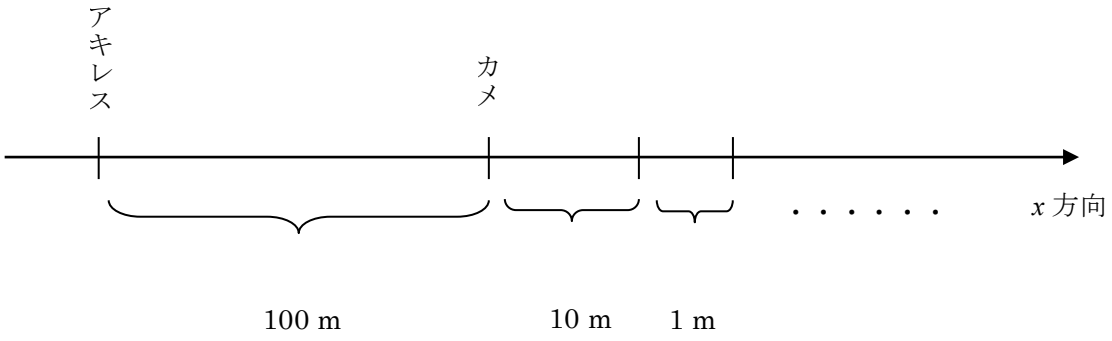


図 6　アキレスとカメ