平成 26 年度

物理学Ⅰ　講義資料

第 1 回

質点系の運動

生命医科学部医工学科

2014/4/10

■　２質点の運動：運動方程式

■　運動量と力積

■　一般の質点系

■　演習問題

これまでは、主に１つの質点（重さはあるが大きさを持たない物体）の運動を取り扱ってきた。実際の物体は大きさもあり、形も様々である。このような物体の運動の考える場合、質点として扱う出来ないことがある。その準備として、まず多数の質点の集まりからなる系を考える。最初に、２つの質点からなる系の運動について勉強する。

■　２質点の運動

図１のように、質点１（質量m_1）に外力F_1、質点２（質量m_2）に外力F_2が働いている。

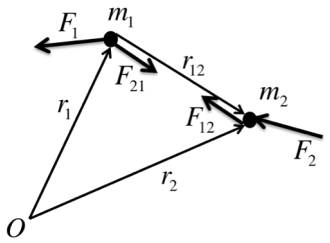

図１　２質点系の運動

さらに、質点Ｉが質点２に及ぼす力（内力）をF_{12}とすると、作用･反作用の法則より質点Ｉは

$$F_{21} = -F_{12} \qquad (1)$$

の力を受ける。

質点１および２の位置ベクトルをそれぞれr_1, r_2とすると、それぞれの運動方程式はつぎのように表される。

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = F_1 + F_{21} \qquad (2)$$

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = F_2 + F_{12} \qquad (3)$$

この２つの式の和をとり、(1)式の関係を用いると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 r_1 + m_2 r_2) = F_1 + F_2 \qquad (4)$$

となる。

ここで、この２質点系の重心の位置ベクトルr_Gを次のように定義する。

$$r_G = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \qquad (5)$$

すると、(4)式は

$$M \frac{d^2}{dt^2} r_G = F \qquad (6)$$

と、表すことが出来る。

ここで、

$$M = m_1 + m_2, F = F_1 + F_2 \qquad (7)$$

である。

(7)式を見ると、「質点系の重心の運動は、この点に質点系の全質量が集中し、ここにすべての外力が働いている」と考えることができる。

■ 運動量と力積

既に学んだニュートンの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(mv) = F \qquad (8)$$

とかけるので、ここで

$$p = mv \qquad (9)$$

という量を定義し、これを運動量という。

運動量を用いると、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}p = F \qquad (10)$$

と表すことが出来る。

この式の両辺を時間 t について、t_1 から t_2 まで積分すると、

$$p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F dt \qquad (11)$$

が得られる。　この式の左辺は、力が働いた結果生じた運動量の変化である。　右辺のことを力積という。　力積を用いて運動の第２法則を次のように表すことが出来る。

「運動量の変化はその時間内に働いた力積に等しい。」

このことから、例えば２つの物体の衝突やテニスでラケットでボールを打つ場合のように、短時間 dt に物体の運動状態を急激に変えるような力 F が加わったときはその瞬間の力を知ることは難しい。しかし、(11)式の関係より、力の加わる前と後の運動量の変化より、力を知ることが出来る。

質点系の運動量についても、その運動方程式(６)より、全質量 M が速度 $V = \frac{d}{dt}r_G$ で動いていると考えると、

$$P = MV \qquad (12)$$

とおくことが出来る。

この結果が、正しいことを導いてみよう。

各質点の位置ベクトルを

$$r_i = r_G + r_i', (i = 1, 2) \qquad (13)$$

と表し、各質点の運動量を p_i　とおくと、系全体の運動量は

$$P = \sum_i p_i = \sum_i m_i \frac{dr_i}{dt} = \sum_i m_i \frac{dr_G}{dt} + \sum_i m_i \frac{dr_i'}{dt} \qquad (14)$$

と表すことが出来る。

(14)式は重心の定義から、次のようになる。

$$P = (\sum_i m_i)\frac{dr_G}{dt} + \sum_i m_i \frac{dr_i'}{dt} = MV \qquad (15)$$

従って(12)式が正しいことがわかる。

この式は、２質点以上の系についても、当てはまる。

このように、質点系の運動量は重心に着目して考えればいいのは、運動量が座標の１次の物理量であるからである。後に取り扱う、運動エネルギーや角運動量は座標について２次の物理量となる為、このように簡単にはならない。

(15)式から、「系に外力が働かなければ、もしくは外力の和がゼロになっていれば系の運動量は一定に保たれる。」ことがわかる。

[演習問題 1]

運動量と力積の単位は MKS 単位系でどう表されるか？

MKS 単位系（エムケーエスたんいけい）とは、長さの単位メートル(m)・質量の単位キログラム(kg)・時間の単位秒(s)を基本単位とする単位系である。

［演習問題 2］

質量 m_1、速さ v_1 の質点 1 と質量 m_2、速さ v_2 の質点 2 が同一直線上で完全弾性衝突（エネルギー保存則が満たされる場合の衝突）をした。衝突後の質点のそれぞれの速さ v_1'、v_2'、をエネルギー保存則を用いて求めよ。

このときの反発係数 e を求めよ。

反発係数の定義は

$$e = -\frac{v_2 - v_1}{v_2' - v_1'}$$

である。