

■物理学基礎 演習問題解答 (4月17日)

[演習問題 1]

速度が次のような時間の関数で表されるとき

$$v(t) = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$$

加速度 $a(t)$ は、その定義から

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = A\omega_1 \cos \omega_1 t - B\omega_2 \cos \omega_2 t$$

となる。

また、速度 $v(t)$ は、

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

隣、この微分方程式を解くと、位置 $x(t)$ は

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = -\frac{A}{\omega_1} \cos \omega_1 t + \frac{B}{\omega_2} \sin \omega_2 + C。$$

となる。

時刻 $t=0$ で、位置 $x(0)=0$ なので、

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{A}{\omega_1} (1 - \cos \omega_1 t) + \frac{B}{\omega_2} \sin \omega_2$$

となる。

[演習問題 2]

\vec{x} の x, y 成分を極座標を用いて表すと、

$$\vec{x} = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$$

となる。

速度 $v(t)$ は、

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

であるので、

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt} \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}, \frac{dr}{dt} \cdot \sin \theta + r \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)$$

となる。この動径方向成分は

$$v_r = \vec{v} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \vec{v} \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{dr}{dt}$$

反時計回りの回転成分は、

$$v_{\theta} = \vec{v} \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) = r \frac{d\theta}{dt}$$

となる。

加速度 $\vec{a}(t)$ は

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = & \left(\left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \cdot \cos\theta - \left\{ \frac{d^2 \theta}{dt^2} r + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right\} \cdot \sin\theta, \right. \\ & \left. \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \cdot \sin\theta + \left\{ \frac{d^2 \theta}{dt^2} r + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \right\} \cdot \cos\theta \right) \end{aligned}$$

となる。 速度のときと同様に

$$\begin{aligned} a_r = \vec{a} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ a_{\theta} &= r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

となる。