平成 26 年度
物理学基礎　講義資料
第 2 回

物体の運動 I

−運動の法則−

生命医科学部医工学科

2014/4/17

■ 前回の復習と　微分方程式

■ 運動の記述

■ 簡単な運動

■ 演習問題

■ 前回の復習

物理：自然現象を支配する法則を明らかにし、数学的記述で表現する。

そのため、物理では数学の様々な手法を多用して、現象を理解していく。

力学：物体の運動を定量的（数学的記述）に把握し、その運動を予測を行う。

単純な運動を記述する為に必要な、物理量と、その数学的関係。

質量（スカラー量）:

位置（位置ベクトル）:

速度（ベクトル量）:

加速度（ベクトル量）:

対象とする運動によって、空間次元が異なる。次元によって、ベクトルで表される量は次元の数だけ要素がある。

■ 物体の運動を記述する方法

➢ **位置**

空間のどの場所に物体があるかを表すための、番地として**座標**を定義する。
基準となる点（原点）を決め、原点からのペクトルとして表すと便利である。

✧ 座標

- **直交座標系**（デカルト座標ともよばれる）
- 球座標系
- 円筒座標系

✧ 位置ベクトル

$\vec{x} = (x, y, z)$： ３次元の直交座標系

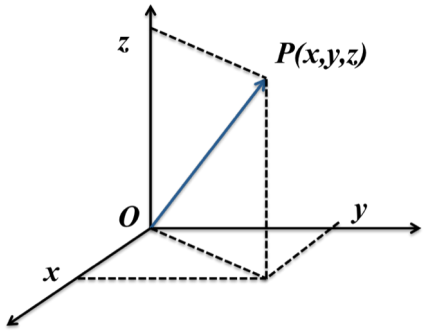

図 2.1　直交座標系

➢ **速度**

物体の運動を考える。物体がある時刻 t_0 に場所（座標）$\vec{x}_0$ にあった物体が時間 Δt 後に、座標 $\vec{x}_1$ に移ったとする。　この物体の移動を表すのにベクトルを用いて

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0 \qquad (2.1)$$

とかける。　この移動は時間 Δt の間におこっているので、この物体が移動する運動を記述する物理量として**速度**を定義する。

$$\vec{V} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

時間 Δt を短くしていくと、その間には速度は変化しないと見なせるので、その極限として時刻 t における瞬間的な速度として、

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

が定義できる。

位置が時刻の関数として

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \qquad (2.4)$$

で与えられるとき、(2.3)式は微分の形式で表される。

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad (2.5)$$

➢ 加速度

さらに、速度が時間的に変化している場合、速度の時間変化として加速度を定義する。

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \qquad (2.6)$$

■ 1 次元空間での運動

➢ 等加速度運動

16 世紀にガリレオ･ガリレイは斜めにおいたレールの上を球を転がす実験をおこなって､球がレール上を移動する距離が時間の 2 条に比例することを見いだした。この運動を数式で表し、どのような運動であるか考えてみよう。

初期位置 $x(0)=0$ 、初速度 $v(0)=0$ （時刻 $t=0$ での位置と速度）の条件で、このことを表すと

$$x(t) = \alpha \frac{t^2}{2} \qquad (2.7)$$

これより、球の速度を求めると

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \alpha t \qquad (2.8)$$

となる。また、加速度は

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \alpha \qquad (2.9)$$

となり、加速度は時間によらない等加速度運動であることがわかる。

➢ 位置

時刻 $t=0$ での位置 $x(0)$ と速度 $v(0)$ がわかっていれば、時間 Δt たった後の位置 $x(\Delta t)$ は

$$x(\Delta t) \approx x(0) + v(0) \cdot \Delta t \qquad (2.10)$$

さらに時間 Δt たった後の位置 $x(2\Delta t)$ は

$$x(2\Delta t) \approx x(\Delta t) + v(\Delta t) \cdot \Delta t \qquad (2.11)$$

となる。これを続けていくと、

$$x(n\Delta t) \approx x(0) + \sum_{i=0}^{n-1} v(i\Delta t) \cdot \Delta t \qquad (2.12)$$

とかける。

このように、時刻 t での位置 $x(t)$ は初期位置 $x(0)$ に各時刻での速度を加えていくことで求められる。これを、$\Delta t \to 0$,および、分割を無限にしていくという極限をとると、積分という形で表すことが出来る。

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t') \cdot dt' \qquad (2.13)$$

■ 2、3 次元空間内での運動

- 2 次元座標系
  - 直交座標　(x, y)
  - 平面極座標　(r, θ)
- 3 次元座標系
  - 直交座標　(x, y, z)
  - 極座標　(r, θ, φ)
  - 円柱座標系　(r, θ, z)
- 2 次元、3 次元空間での速度、加速度

時刻 t に位置 $\vec{x}(t)$ にあった物体が時間 Δt 後に $\vec{x}(t+\Delta t)$ に移動したときの移動量(変位)をベクトルで表すと

$$\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t) \qquad (2.14)$$

2,3 次元の速度 $\vec{v}$ は、1 次元の速度をベクトルに拡張し、

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} \qquad (2.15)$$

となる。同様に加速度も、

$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad (2.16)$$

と表される。

- 極座標系での 2 次元運動

平面内の物体の運動を平面極座標で表したときの、速度、加速度の極座標成分を考えたとき、

$$\vec{v}(t) \equiv v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta \qquad (2.17)$$

$$v_r = \dot{r} \qquad (2.18)$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (2.19)$$

と表される。(2.18)は「腕の長さ」の速度、(2.19)は角速度を「腕の長さ」倍したものである。

[演習問題 1]

２つの周期の振動が重なっている運動、　すなわち速度が

$$v(t) = A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_2 t$$

とかけるとき、加速度 $a(t)$ および位置 $x(t)$ を求めよ、　ただし、初期位置 $x(0) = 0$ とする。.

[演習問題 2]

２次元平面の位置ベクトル $\vec{x}$ の x, y 成分を極座標を用いて、$\vec{x} = (r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)$ と表す。これを微分することによって、速度 $\vec{v}$ 、加速度 $\vec{a}$ の動径方向成分.および、反時計回りの回転成分を求めなさい。