平成 26 年度

物理学Ｉ　講義資料

第 1 回

質点系の運動２

生命医科学部医工学科

2014/4/17

- 前回の復習：２質点系の運動
- N 質点系の全運動エネルギーと、全角運動量
- 演習問題

先週に引き続いて、質点系の運動について考える。
系の運動エネルギーについて考え、2 質点から多数の質点がある場合に拡張していく。

■　２質点系の重心運動と相対運動

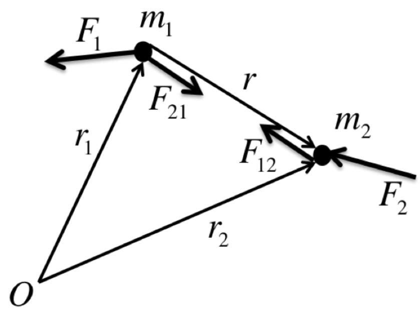

図１　２質点系の運動

前回、質点系の運動について重心の周りの運動（重心運動）と、質点の間での相対運動に分けて取り扱えることを学んだ。

重心運動は、系の全質量 $M = m_1 + m_2$ が重心 $r_G = \dfrac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$ に集まっているとして扱うことが出来る。

相対運動は、2 質点の相対位置 $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ に関する運動である。

外力がない場合、$F_{21} = -F_{12}$ なので

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)\vec{F}_{12} \tag{2.1}$$

換算質量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を定義すると、

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12} \tag{2.2}$$

が成り立つ。

この式から、相対運動の運動方程式は慣性質量として換算質量が現れることがわかる。

例：連星とよばれる２つの星の運動

連星という２つの星（一般には質量が異なっている）が一定の距離 $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 離れて、お互いの周りを回っている場合について考える。２つの星の質量を $m_1, m_2 (m_1 \neq m_2)$ とする。この２つの星の円運動について、運動方程式は

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{2.3}$$

となる。ここで換算質量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を代入して、式を変形すると、この円運動の角速度 ω は、

$$\omega = \sqrt{G(m_1 + m_2)/r^3} \qquad (2.4)$$

となる。

■　２質点系の運動エネルギー

運動エネルギーも重心運動と相対運動に分離することができる。相対速度、

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \qquad (2.5)$$

を用いると、

$\vec{P} = M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ から、

$$\vec{v}_1 = \vec{V} - \frac{m_2}{M}\vec{v}, \vec{v}_2 = \vec{V} + \frac{m_1}{M}\vec{v}, \qquad (2.6)$$

となる。系の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 \qquad (2.7)$$

なので、(2.6)より、

$$K = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 \qquad (2.8)$$

が、導きだされる。　これは、系の運動エネルギーも重心の運動エネルギーと相対運動の運動エネルギーの和として扱えることを示す。

■　N 質点系の運動

２質点を拡張して N 質点の系について、その運動を考える。

質量 $m_1, m_2, m_3,,,,, m_N$ を持つ質点系のそれぞれの位置ベクトルをとする。

２質点系の場合と同様に N 質点系の重心 $\vec{r}_G$ は

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} \qquad (2.9)$$

となり、重心の速度は

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{M} \qquad (2.10)$$

と表される。

重心の運動方程式は

$$M\frac{d\vec{v}_G}{dt}=\sum_i m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\sum_i(F_i+\sum_{j\neq i}F_{ij}) \tag{2.11}$$

となる。第二項は内力の総和なので、0　となり、

$$M\frac{d\vec{v}_G}{dt}=\sum_i F_i \tag{2.12}$$

重心運動の運動量は、

$$P=\sum_i m_i\vec{v}_i=M\vec{v}_G \tag{2.13}$$

となる。

多数の質点を扱う場合は、相対運動の位置の基準点として重心を取ることが多く、各質点

の相対的な位置ベクトルとして、

$$\vec{r}_i{}'=\vec{r}_i-\vec{r}_G \tag{2.14}$$

を定義すると、相対運動の運動量は

$$\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}=0 \tag{2.15}$$

となる。

次に、系全体の運動エネルギーを考える。
系全体の運動エネルギーKは各質点の運動エネルギーの和である。
これを、式で表すと

$$K=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2 \tag{2.16}$$

である。
(2.14)式を代入して整理すると、

$$K = \frac{1}{2}M\vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2 \tag{2.17}$$

となる。この式から多数の質点からなる系の運動エネルギーは、重心運動のエネルギーと、

相対運動のエネルギーに分解できることがわかる。

自然界にある物体は多数の質点（原子や分子）から構成されている。　すなわち多数の質点系と考えることが出来る。すなわち物体の運動エネルギーとしているものは、重神経の運動エネルギーであり、相対運動の遠藤エネルギーは、内部エネルギーとして取り扱われており、例えば熱エネルギーに対応する。

■ 系の全角運動量

運動エネルギーと同様に、系全体の角運動量（全角運動量）も次のように表すことが出来る。

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i \tag{2.18}$$

(2.18)式に(2.14)式を代入して整理すると、

$$\vec{L} = M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + \sum_i m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{L}_G + \sum_i \vec{L}_i \tag{2.19}$$

となり、系の全角運動量も重心の角運動量と、相対運動の角運動量に分けられることが

わかる。

■ 全角運動量の方程式

それでは、この全角運動量に対する時間変化に関する方程式を考えてみる。

(2.18)式を時間微分すると、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\left(m_i\vec{v}_i\right)}{dt}\right) \tag{2.20}$$

となる。　この式を整理していくと（ベクトル計算のしかたをおもいだしてみよう。）

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{2.21}$$

となるので、角運動量の時間変化に関する方程式は、外力のみによることがわかる。

[演習問題 1]
地球と月の運動について考える。地球と月は全体として太陽の周りを回っている。同時にお互いの運動（相対運動）を考えると、お互いの周りをまわっている。（ここでは円運動として考える）地球と月の間の平均距離は $r \approx 384,400[km]$ である。また、地球の質量 $m_{Earth} \approx 5.98 \times 10^{24}[kg]$、月の質量 $m_{Moon} \approx 7.35 \times 10^{22}[kg]$ として、その周期を求めなさい。（1 周するのにかかる時間。単位は[日]で答えなさい。）

［演習問題 2］
多数の分子からなる気体の相対運動のエネルギーは熱エネルギーとよばれている。　温度 $T[K]$ の 1mol(モル： 6×10^{23} 個)の分子の熱エネルギーは $\frac{3}{2}RT$ で表される。　R は気体定数で $8.3[J/_{mol \cdot K}]$ である。

このことをふまえて、室温(300K)での 1 個の窒素分子の速度の大きさはどのくらいか？

この窒素分子の気体が平均速度 $10[m/_{\sec}]$ で動いている。（風速）この気体の重心運動のエネルギーと、相対運動のエネルギーの比を求めよ。

窒素分子の質量は $46 \times 10^{-27}[kg]$ として、計算しなさい。