■物理学基礎　演習問題解答（4 月 24 日）

[演習問題 1]

講義の中で扱ったバネの運動において、質点の質量と速度に比例する抵抗力 $-2qmv$ が働くときの運動方程式を書きなさい。バネ定数は k とする。ここで、$\frac{k}{m} > q^2$ とする。

また、この運動方程式の解を求めなさい。

この運動の運動方程式は

と書くことが出来る。

$$m \cdot \frac{dx(t)^2}{dt^2} = -k \cdot x(t) - 2qmv(t) \qquad (1)$$

抵抗力がないときの運動で使った振動数 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ を用いて書き直すと、

$$\frac{dx(t)^2}{dt^2} + 2qv(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \qquad (2)$$

となる。

この微分方程式を解く為に

$$x(t) = X(t) \cdot e^{-qt} \qquad (3)$$

とおくと、

その１階微分、２階微分はそれぞれ、次のようになる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt} \cdot e^{-qt} - qX(t) \cdot e^{-qt} \qquad (4)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2X(t)}{dt^2} e^{-qt} - 2q \frac{dX(t)}{dt} e^{-qt} + q^2 X(t) e^{-qt} \qquad (5)$$

これを、(2)式に代入して整理すると、

$$\frac{dX(t)^2}{dt^2} + (\omega_0^2 - q^2) X(t) = 0 \qquad (6)$$

と $X(t)$ に対する微分方程式が導ける。

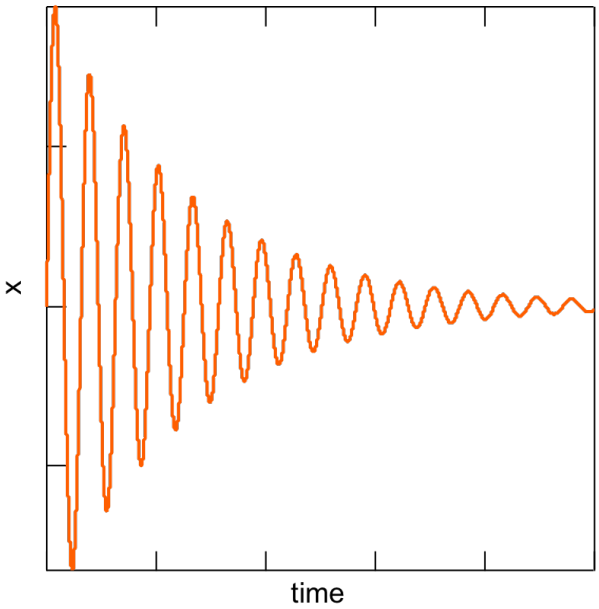
この微分方程式の解、$X(t)$ は

$$X(t) = X_0 \sin(\sqrt{(\omega_0^2 - q^2)} \cdot t + \varphi_0) \tag{7}$$

となる。

従って、式の定義に戻って、

$$x(t) = X_0 \sin(\sqrt{(\omega_0^2 - q^2)} \cdot t + \varphi_0) \cdot e^{-qt}$$

が求められる。

この運動は　振動数 $\sqrt{(\omega_0^2 - q^2)}$ の振動が減衰していく運動である。