簡単な形状を持ついくつかの物体の慣性モーメントについて計算してみよう

[演習問題 1]

図 3.3 に示すような長さ $2a$ 、線密度 ρ である、細い一様な棒の重心 G を通り棒に垂直な回転軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。　又回転軸が棒の端 A に移動したときのこの棒の慣性モーメントを求めなさい。

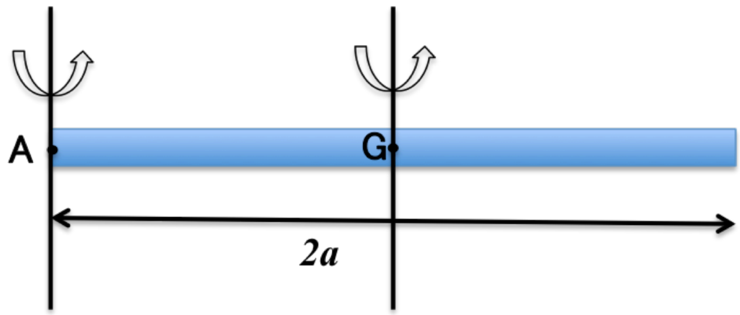

図 3.3

この棒の G の周りの慣性モーメントは

$$I_G = \int_{-a}^{a} \rho x^2 dx = \left[\frac{\rho x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{2}{3}\rho a^3$$

となる。

また、A の周りの慣性モーメントは

$$I_A = \int_{0}^{2a} \rho x^2 dx = \left[\frac{\rho x^3}{3}\right]_{0}^{2a} = \frac{8}{3}\rho a^3$$

この棒の質量は

$M = \rho \cdot 2a$

なので、I_G, I_A はそれぞれ

$$I_G = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I_A = \frac{4}{3}Ma^2$$

となる。剛体の慣性モーメントについて、次の定理が成り立つ。

「質量 M の剛体のある回転軸に対する慣性モーメントは、その軸に平衡で重心をとおる回転軸の周りの慣性モーメントと、重心に全質量が集まっていると考えたときのその軸の周りの慣性モーメントの和になる。」

この定理から A の周りの慣性モーメントを求めてみると、

$$I_A = I_G + Ma^2 = \frac{4}{3}Ma^2$$

と、同じ結果となる。

[演習問題 2]
図 3.4 に示す半径 a、面密度 ρ である薄い一様な円盤の中心を通り、板に垂直な回転軸（z 軸）の周りの慣性モーメント I_z を求めなさい。

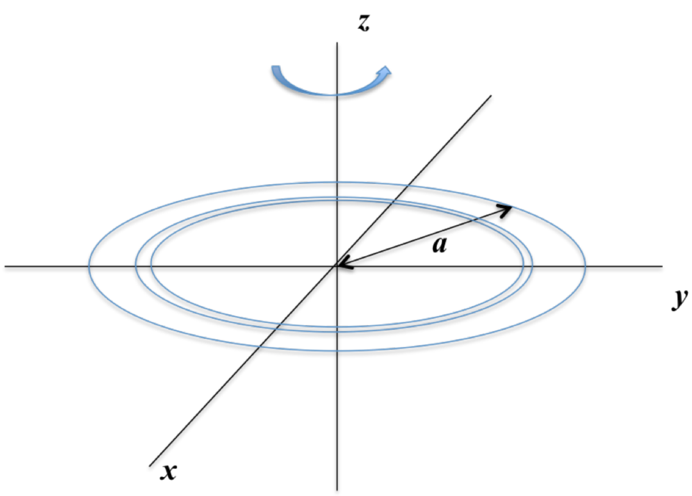

図 3.4

この円盤の z 軸の周りの慣性モーメントは半径 r 幅 dr の円が半径が連続的 $r = 0 \to a$ に変化していった物で出来ていると考えられるので、

$$I_Z = \int_0^a \rho \cdot 2\pi r \cdot r^2 dr = \left[\frac{2\pi\rho r^4}{4}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi\rho a^4$$

となる。