平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第３回

物体の運動Ⅱ

−運動の法則−

生命医科学部医工学科

2014/4/24

目標：　質点の運動を表す微分方程式の意味と、その解き方について理解する。

（まずは１次元！！２次元、３次元はその拡張）

■ 前回の復習

■ 運動の法則

■ 運動の記述としての微分方程式

■ 微分方程式の解法

■ 演習問題

■　前回の復習

質点の運動を記述する為の準備として、物体の位置（ベクトル)、速度（ベクトル)、加速度（ベクトル）の関係を微分の形で表現した。

質点の位置は、質点が運動している空間における位置ベクトルで表す。

時刻 t 　における、質点の位置を $\vec{x}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ と表せるとき、

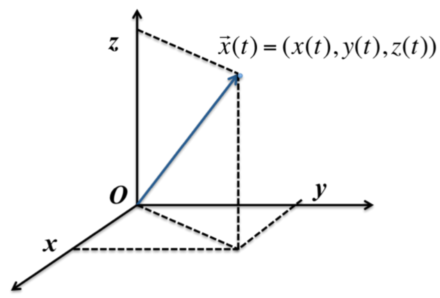

図 2.1　直交座標系

質点は速度、

$$\vec{v}(v_x(t),v_y(t),v_z(t))=\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=(\frac{dx(t)}{dt},\frac{dy(t)}{dt},\frac{dz(t)}{dt})$$

加速度、

$$\vec{a}(a_x(t),a_y(t),a_z(t))=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$$

で運動していると表される。

時刻 $t=0$ における、質点の位置 $\vec{x}(0)$ と、初速度 $\vec{v}(0)$、加速度の初期値 $\vec{a}(0)$ と表すことが出来るときるとき、その後の質点の運動を予測することが出来る。

■ 運動の法則

ニュートンは物体の運動に関する経験的事実から、運動を記述する為の基本的な３つの法則を導きだした。

この法則は運動の法則として、質点の力学の基になっている。

- **運動の第 1 法則**

  “慣性の法則”とも呼ばれ，すべての質点は外から力が加わらない限り，静止している場合は静止しつづけ，等速直線運動しているものは等速直線運動を続けるということを述べている。

- **運動の第 2 法則**

  “運動の法則”と呼ばれ、質点の加速度は力を加えた向きに、その大きさは加えた力の大きさに比例し、質点の質量に反比例することを定義している。これを式で表すと

$$\vec{a}(t)=\frac{\vec{F}(t)}{m} \qquad (3.1)$$

となる。　この式を変形して一般にはこの法則は

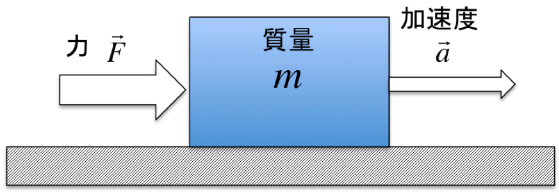

図３．１力と加速度

$$\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t) \qquad (3.2)$$

と書くことが出来る。この式を**運動方程式**という。

- **運動の第 3 法則**

“**作用·反作用の法則**”とも呼ばれ，この法則では 2 つの質点 A と B を考えた場合，質点 A から質点 B に力 $\vec{F}_{AB}(t)$ が加えられているとき，必ず物体②は物体①に大きさが同じで向きが逆の力 $\vec{F}_{BA}(t)$ を加えているという関係を示している。

すなわち、

$$\vec{F}_{BA}(t) = -\vec{F}_{AB}(t) \qquad (3.3)$$

の関係が常に成り立つ.。

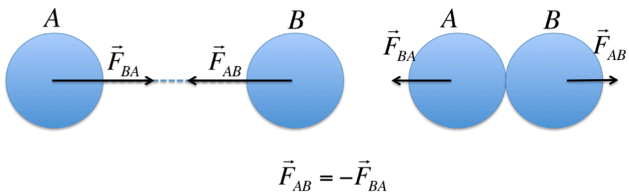

図 3.2　作用と反作用

■ 等速運動

- 等速運動の運動方程式

等速運動は、言葉の通り速度が一定の運動である。

すなわち、速度は

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \qquad (3.4)$$

と、時間によって変わらず常に一定である。

すると、この運動の加速度は

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 0 \qquad (3.5)$$

となり、等速運動をする質点（質量 m）の運動方程式は

$$m \cdot \vec{a}(t) = 0 \qquad (3.6)$$

と表される。すなわち、この運動の場合、

$$\vec{F}(t) = 0 \qquad (3.7)$$

力が働かないときの運動が等速運動であり、慣性の法則となる。

■ 等加速速運動

➢ 等加速度運動の運動方程式

前回の講義で取り上げた、ガリレオの実験では「斜めにおいたレールの上を球を転がすとき、球がレール上を移動する距離が時間の 2 乗に比例する」ことがわかった。

この運動を数式で表し、どのような運動であるか考えてみよう。

初期位置 $x(0)=0$ 、初速度 $v(0)=0$ （時刻 $t=0$ での位置と速度）の条件で、このことを表すと

$$\vec{x}(t)=\vec{\alpha}\frac{t^2}{2} \qquad (3.8)$$

となる。この運動の加速度は

$$\vec{a}(t)=\frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}=\vec{\alpha} \qquad (3.9)$$

となり、加速度は時間によらない等加速度運動であることがわかる。

この運動の運動方程式は

$$m\cdot\vec{a}(t)=m\cdot\vec{\alpha}=\vec{F} \qquad (3.10)$$

となる。この運動方程式は時間によらない力（大きさも、向きも変わらない）が質点に加わった場合、等加速度運動をすることを表している。

■ 運動方程式の解法

➢ 運動方程式を解くとは？

(3.2) 式で表されるニュートンの運動方程式は、質点の運動を記述する方程式である。この式から、質点の運動、すなわち時間の関数として質点の位置を求めることが出来る。このことを<u>運動方程式を解く</u>という。

運動方程式を解く為には、質点の初期の位置、速度を与える必要がある。

これらの情報を<u>初期条件</u>という。

これから、様々な次元の運動を取り扱うのだが、はじめは簡単のため 1 次元の運動で、運動方程式の解き方に慣れることとする。

➢ 落下運動

はじめに重力の下での落下運動を考える。重力のよる落下運動は、質点に鉛直下方（真下の方向）に質量 m に比例する力 $m\cdot g$ が働いているときの運動方程式を解けばよい。(３次元でも考えてみてください。)

この運動の運動方程式は

$$m\cdot a(t)=-m\cdot g \qquad (3.11)$$

となる。
両辺を時間で積分して、

$$v(t)=\int_{t=0}^{t} a(t)\cdot dt=\int_{t=0}^{t} -g\cdot dt=v_0-g\cdot t \qquad (3.12)$$

と、速度が求まる。　ここで、v_0 は初期速度である。
さらに、もう一度積分して、

$$x(t)=\int_{t=0}^{t} v(t)\cdot dt=\int_{t=0}^{t} (v_0+g\cdot t)\cdot dt=x_0+v_0\cdot t-\frac{1}{2}g\cdot t^2 \qquad (3.13)$$

と、位置が求まる。ここで x_0 は初期位置である。
この運動を、初期速度 $v_0=0$,初期位置 x_0 としてこの運動をグラフで横軸を時間 t 、縦軸を位置 x で表すと次のようになる。

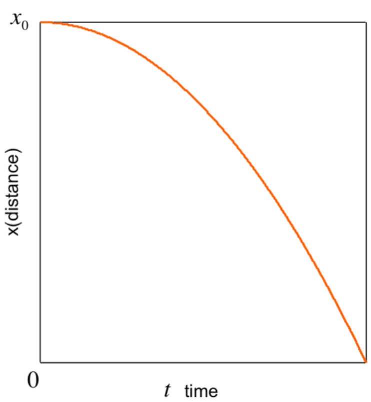

図 3.3 落下運動

➢ バネの運動

次にバネの運動を考える。　バネは自然長（伸びても縮んでもいない状態の時のバネの長さ）からの変位（伸びや縮みの大きさ）が小さいときには、変位に比例した力を持つことが知られている。(フックの法則)
ここでは、変位を x とし、1 次元でバネにつながった質点の運動を考える。

バネの伸び縮みで生じる力（復元力）の比例係数をバネ定数と呼び、k で表すと復元力は

$$F(t)=-k\cdot x(t) \qquad (3.14)$$

で与えられる。
従って運動方程式は

$$m\cdot a(t)=-k\cdot x(t) \qquad (3.15)$$

となる。
（ここでは、変位や力が時間の関数で

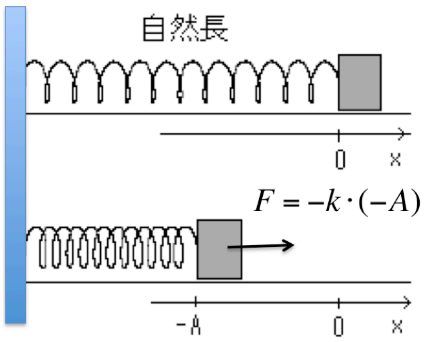

図 3.4　バネにつながった質点の運動

あるのがわかるように書いているが、実際に運動方程式を解くときには、あからさまに時間の関数として書かなくてもよい。)
すなわち、

$$m\cdot\frac{dx(t)^2}{dt^2}=-k\cdot x(t) \qquad (3.16)$$

という、微分方程式を解けばいいことになる。

この式の解は $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$ とおくと、

$$x(t)=x_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0) \qquad (3.17)$$

となる。
この運動は単振動といい、原点の周りを周期 $2\pi/\omega_0$,振幅 x_0 で行ったり来たりする運動である。

- 抵抗を受ける運動

ここでは、摩擦や空気の抵抗などがある場合の運動について考える。
例として、大気中を質量 m の雨滴（質点）の落下をとりあげる。　この雨滴は質量、速度に比例する抵抗力 $-kmv$ を受けて鉛直落下するとする。k は比例係数である。初め雨滴は止まっていて、重力加速度を受けて落下していくと考える。
このときの雨滴の運動方程式は鉛直下向きに座標をとると、

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kmv \qquad (3.18)$$

となる。
この方程式を解くため、

$$\frac{dv}{(\frac{g}{k}-v)}=kdt \qquad (3.19)$$

と変形すると、両辺が積分でき、

$$-\log_e(\frac{g}{k}-v)=C+kt \qquad (3.20)$$

が得られる。
この運動の速度の時間変化をグラフで書くと

となる。こ

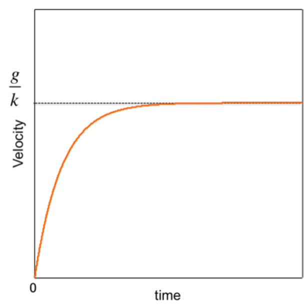

図 3.5 抵抗力がある 6 きの落下運動の速度の変化

れから、雨滴は最終的に一定速度 $\dfrac{g}{k}$ で落下していくことがわかる。

この速度のことを終端速度と呼ぶ。

[演習問題 1]

講義の中で扱ったバネの運動において、質点の質量と速度に比例する抵抗力 $-2qmv$ が働くときの運動方程式を書きなさい。バネ定数は k とする。ここで、$\dfrac{k}{m} > q^2$ とする。

また、この運動方程式の解を求めなさい。