

平成 26 年度  
物理学 I 講義資料  
第 3 回

# 剛体運動の記述

---

生命医科学部医工学科

2014/4/24

目標：多質点の集合体としての剛体とその運動の記述方法について理解する。

- 前回の復習：2 質点系の運動
- 剛体とは？
- 剛体の釣り合い
- 剛体の運動の記述
- 演習問題

■ 剛体とは。

これまでは物体を大きさを持たない質量点を持つ点として扱ってきたが、実際の物体は大きさがあり空間的に広がっている。固体は気体や液体とは形状の性質が異なり、ほぼ決まった大きさや形を持つ。

ここでは、大きさや形状が変化しない、理想的な物体を考える。このような大きさ形状の変わらない物体のことを**剛体**とよぶ。

すなわち剛体内部の点どうしの位置には

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const} \quad (3.1)$$

という関係がある。

質点とは異なり、剛体の運動を考えるときには、剛体自身の回転や、向きも考える必要がある。又、剛体は相対距離が変化しない質点の集まりと考えることも出来、前回取り扱った質点系の運動の性質を使える場合も多い。しかし、質点系のように離散的に点が集まった物ではなく連息的につながった物体として扱う必要がある。

■ 剛体の釣り合いの条件（平衡条件）

➤ 剛体の自由度

質点の場合は、各質点の位置は座標 (x, y, z) で表される、このとき、質点の自由度は3という。それでは、剛体の場合にはどのように表すことが出来るだろうか？剛体は多数の質点が連続的に集まった物として考えられるので、重心と、重心からの相対距離にわけて考えられる。

重心の運動の自由度は質点と同じく3である。

一方、相対運動の自由度は相対距離は重心の周りで変わらない（剛体の定義より）ので、剛体の周りでの回転（回転軸と、回転角）の3自由度となる。

すなわち、剛体の運動の自由度は、合計6となる。

（運動の自由度の数だけ、時間変化する変数があるということである。）

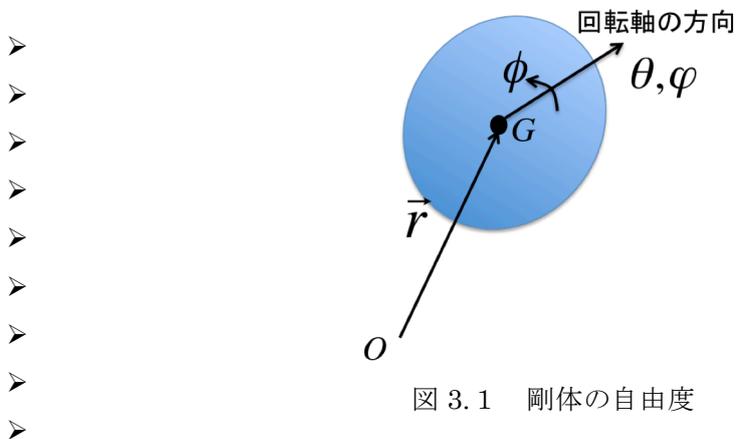


図 3.1 剛体の自由度

➤ 慣性モーメント

剛体は大きさのある形を持つため、重心の運動だけでなく形の向きが、重要な運動の要素に入ってくる。特に剛体の回転運動を記述する為に角運動量が重要な役割をする。

ある剛体が回転軸  $O$  ( $Z$  軸) のまわりを回転運動している場合を考える (図 3.2)。

こ  
の  
場  
合  
、  
 $Z$   
軸  
に  
対  
す  
る

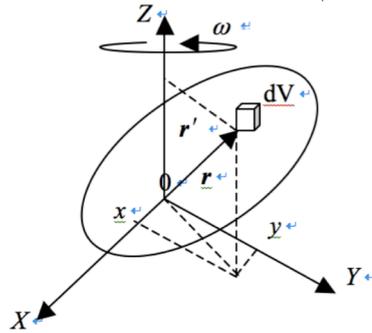


図 3.2 剛体の運動の記述

回転角が決まれば剛体の運動が決まる。角運動量は剛体の各部分が  $z$  軸の周りを同

じ角速度  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  (角速度ベクトルは  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ ) で回転するとして、次のよう  
に

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m |\vec{r}_i|^2 \vec{\omega} \quad (3.2)$$

表される。

角運動量の運動方程式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (3.3)$$

である。物体の位置  $\vec{r}_i$  に力  $\vec{F}_i$  が働くとき。その力が物体を回転させようとする

力  $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  を力のモーメントと呼び  $\vec{N}$  で表す。

式(3.2)で角速度  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  の係数  $\sum_i m_i |\vec{r}_i|^2$  を回転軸周りの慣性モーメント  $I$  と呼ぶ。

剛体では連続的に質量が分布しているので、物体の密度分布  $\rho(x, y, z)$  を用いて剛体の慣性モーメントは

$$I = \int r^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (3.4)$$

となる。  
すなわち

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N} \quad (3.5)$$

という剛体回転に対する運動方程式が得られる。  
剛体の重心に対する運動方程式は

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (3.6)$$

となる。慣性モーメント=質量×距離<sup>2</sup>” という形になっている。(3.5)と(3.6)を見比べると、この慣性モーメントは回転運動に関する剛体の質量としての意味がある。したがって慣性モーメントが大きい方が回転させるのに大きな回転力（トルク）が必要となる。

また、微小体積  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  のもつ回転の運動エネルギー  $dK$  は

$$dK = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho(\vec{r}) dV \cdot (\vec{r}^2) \omega^2 \quad (3.7)$$

となる。ここで、 $dm = \rho(\mathbf{r}) dV$ 、 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  を用いた。式 (7) より、剛体の全運動エネルギー  $K$  は

$$K = \int_V dK = \frac{1}{2} \cdot \int_V \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2 + z^2) \omega^2 dV = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.8)$$

となり、慣性モーメントを用いて、並進運動と同様な式の形 ( $=1/2 m v^2$ ) に表すことができる。

これまでの話から、回転軸の方向が不変であるような剛体の回転運動と、質点の並進運動の間には、以下のような対応関係が見られる。

ただし慣性モーメントは、質量のように物体固有の量ではなく回転軸の方向が変わらなくても物体のどこを貫くかによって変化する量である。

| 回転方向が不変である場合の剛体の回転運動     | 質点の並進運動             |
|--------------------------|---------------------|
| 慣性モーメント $I$              | 質量 $m$              |
| 角速度 $\omega$             | 速度 $v$              |
| 角運動量 $I \omega$          | 運動量 $mv$            |
| 運動方程式 $I d\omega/dt=N$   | 運動方程式 $mdv/dt=F$    |
| 運動エネルギー $1/2 I \omega^2$ | 運動エネルギー $1/2 m v^2$ |

簡単な形状を持ついくつかの物体の慣性モーメントについて計算してみよう

[演習問題 1]

図 3.3 に示すような長さ  $2a$ 、線密度  $\rho$  である、細い一様な棒の重心  $G$  を通り棒に垂直な回転軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。又回転軸が棒の端  $A$  に移動したときのこの棒の慣性モーメントを求めなさい。

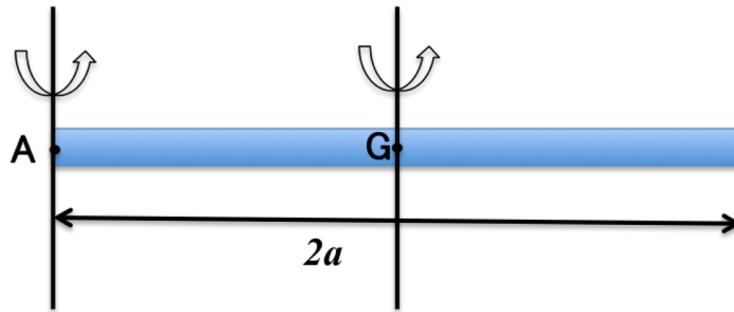


図 3.3

[演習問題 2]

図 3.4 に示す半径  $a$ 、面密度  $\rho$  である薄い一様な円盤の中心を通り、板に垂直な回転軸 ( $z$  軸) の周りの慣性モーメント  $I_z$  を求めなさい。

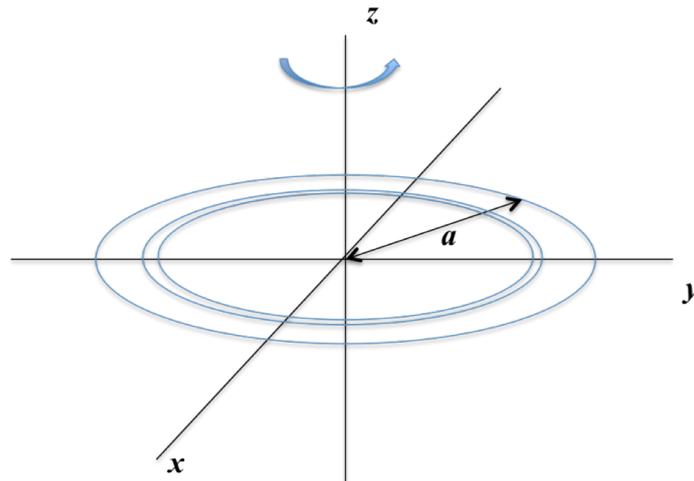


図 3.4