平成 26 年度

物理学Ｉ　講義資料

第 4 回

剛体の運動

生命医科学部医工学科

2014/5/8

<u>目標：剛体の運動に置ける力の取り扱いについてについて理解する。</u>

- 前回の復習：慣性モーメント
- 剛体の釣り合い：平衡条件
- 剛体の並進運動と回転運動
- 実体振り子
- 演習問題

■　剛体の釣り合い：平衡条件

質点の場合は，その大きさを考慮しないために，図１のように，質点に加わるすべての力が式（4.1）に示す関係があれば釣り合っているといい、質点は静止する。

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \tag{4.1}$$

剛体の並進運動についても、外力の和がゼロである場合には剛体の並進運動は無く、重心の位置は静止している。これに対して、剛体は大きさを持つ為に力の加わる位置（作用点）が異なっているため、並進運動には影響が無い力（すなわち並進運動に対して釣り合っている力）の場合でも、回転運動を与える場合がある。剛体が回転しない場合には、剛体に加えられている慣性モーメントの和もゼロになる。すなわち、

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \tag{4.2}$$

となる。

いくつかの例を用いて、この問題を考える。

例１：壁に立てかけられた棒

図のように、長さ$2L$の棒を角度θで壁に立てかける。　床との間には最大摩擦係数$\mu_{\max}$の摩擦力が働いている。壁との間には摩擦力は働いていないと仮定する。

このとき、棒が立てかけられたままで、滑り出さない角度について考える。

棒が滑り出さない為には、棒が回転しないということなので、重心の周りのモーメントの和がゼロになる。

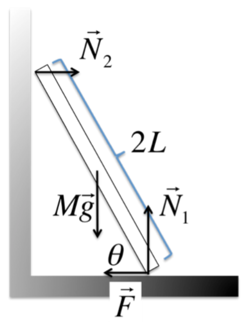

図 4.1　壁に立てかけた棒

■　物理振り子（実体振り子：Physical pendulum）：固定軸周りの剛体の回転運動

➢ 実体振り子とは　水平な固定軸で吊るされて、重力だけで自由に振動する剛体のことをいう。

（運動の自由度の数だけ、時間変化する変数があるということである。）

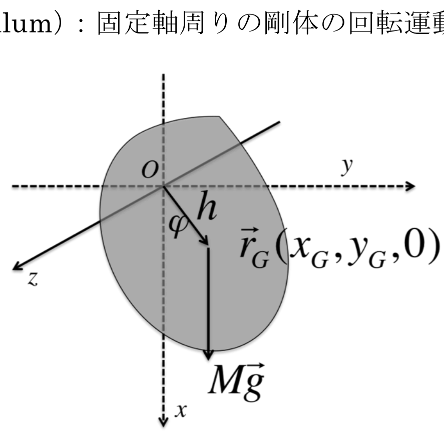

図 4.3　物理振り子

- 物理振り子の運動方程式

図 4.3 のように、固定軸を z 軸にとり、重心が x−y 平面上にくるように座標系をとる。このときの回転運動の運動方程式は、前回の（3.5）式から z 軸周りの回転のみ考えればいいので、

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_z \tag{4.3}$$

となる。I_z は固定回転軸（z 軸）周りの慣性モーメント、N_z は固定回転軸周りの外力のモーメントである。すなわち、

$$N_z = \left[\vec{r}_G \times M\vec{g}\right]_z = -Mgh\sin\varphi \tag{4.4}$$

である。

従って、（4.3）式は

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgh\sin\varphi \tag{4.5}$$

となる。　振動の振幅が小さいときは、$\varphi << 1$ と見なすことが出来近似的に式(4.)は

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgh\varphi \tag{4.6}$$

となる。質点の振り子と同じ形の方程式なので、単振動の解を持つ。

すなわち、

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{4.7}$$

となる。ここで、

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I_z}} \tag{4.8}$$

で、振幅 A と、初期位相 α は初期条件から決まる定数である。　すなわち、物理振り子は、この角振動数 ω 、周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mgh}} \tag{4.9}$$

で単振動する。この剛体の固定軸周りの回転半径 k_z を次のように定義すると、

$$I_z = Mk_z^2 \tag{4.10}$$

(4. 9)式は

$$T = 2\pi \frac{k_z}{\sqrt{gh}} \qquad (4.11)$$

となる。

- 物理振り子の相当単振り子の長さ

これまでに学んできたように、長さ $\boldsymbol{l}$ の単振り子の周期は $2\pi\sqrt{l/g}$ なので、考えている物理振り子と同じ周期で単振動する振り子の長さを $\boldsymbol{l_E}$ とすると、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_E}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mgh}} \qquad (4.12)$$

となり、

$$l_E = \frac{I_z}{Mh} = \frac{k_z^2}{h} \qquad (4.13)$$

である。　この $\boldsymbol{l_E}$ のことを、物理振り子の***<u>相当単振り子長さ</u>***という。

その他の固定軸周りの剛体の回転運動に関する例：

［1］　フィギュアスケートのスピン

フィギャスケートでは、人が腕をのばして回転している状態から腕を縮めると回転速度が大きくなる。このことについて、この人を簡略化して質量 M 、半径 a 、高さ h の円柱に長さ l 、質量 m の棒が 2 本ついたものとして考える。
腕をののばした状態での慣性モーメントを I_1、角速度を ω_1、腕を縮めた状態での慣性モーメントを I_2、角速度を ω_2 とする。スケートリンクとの摩擦は無視すると、角運動量保存則が成り立つので

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

となる。

　腕をのばしたときの慣性モーメントは、円柱の慣性モーメントと 2 本の腕の慣性モーメントの和となる。(腕の棒の重心は回転軸から $a+\dfrac{l}{2}$ はなれている。）腕を縮めたときの慣性モーメントは腕の慣性モーメントは小さいとして無視する。(腕の長さ l がとても小さくなると考える)
すると、それぞれの慣性モーメントは、

$$I_1 = \frac{1}{2}Ma^2 + 2(\frac{1}{12}ml^2 + m(a + \frac{l}{2})^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}Ma^2$$

となる。

例えば、質量 $M = 50kg$、半径 $a = 0.2m$、長さ $l = 0.8m$、質量 $m = 2kg$ とすると、腕を伸ばしたときと、縮めたときの回転速度は何倍違うだろうか？

[演習問題 1]

図 4.4 に示すような 3 辺の長さ $a, b, l (a, b << l)$ である直方体の剛体(質量 M)の棒の端 A に、棒の中心を通り長さ a の辺に平行に軸をつけた物理振り子の振動の周期を求めなさい。

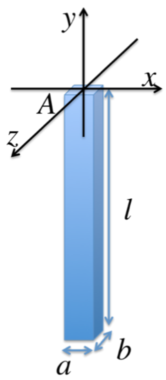

図 4.4