平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第 6 回

中間試験解答

−等速円運動（様々な運動方程式の復習）−

生命医科学部医工学科

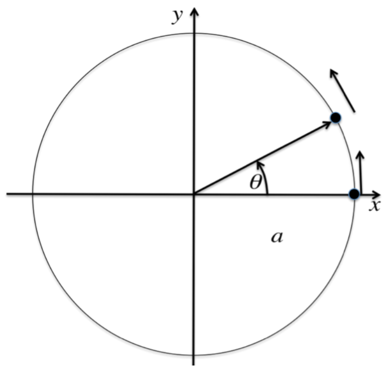
2014/5/22

運動方程式に現れる力の性質を円運動の場合について考えてみる。また、中間試験問題について解答しながら運動方程式の解法を復習する。

■　等速円運動の表記

円周上を等速で運動する質点の位置はどのように表すことが出来るだろうか？

円周上を一定速度ということは、空間座標における角度変化が時間よらず一定あるということである。　ここで円運動する円周上上にある平面での 2 次元空間での運動を考える。図に示すように直交座標系における質点の座標 $\vec{r}=(x,y)$ は、原点周りの角度 θ と原点からの距離 r を用いて次のように表される。



$$x = r\cdot\cos\theta$$
$$y = r\cdot\sin\theta$$

質点の円周上の運動を表すのに、円の中心を座標の原点にとると都合が良い。

原点周りの角度の時間変化を

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega$$

とすると、原点を中心として半径 a の円周上を運動する時刻 t での質点の座標 $\vec{r}=(x,y)$ は

$$x = a\cdot\cos\omega t$$
$$y = a\cdot\sin\omega t$$

と表される。ここで ω は角度の時間変化を表し、角速度と呼ばれる。

この質点の運動について考える。

速度$\vec{v}$は、座標の時間微分$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt})$で表されるので

$$v_x = -a\omega\cdot\sin\omega t$$
$$v_y = a\omega\cdot\cos\omega t$$

となる。

また、加速度$\vec{a}$は速度の時間微分（座標の 2 階微分）なので

$$a_x = -a\omega^2\cdot\cos\omega t$$
$$a_y = -a\omega^2\cdot\sin\omega t$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

と書ける。

これを、座標系で表すと、図のようになる。

（ニュートンの）運動方程式から、等速円運動をする質点に働いている力$\vec{F}$は

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$F_x = -ma\omega^2\cdot\cos\omega t$$
$$F_y = -ma\omega^2\cdot\sin\omega t$$

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega^2\vec{r}}$$

となる。

これは、常に大きさが一定で円運動の中心に向いた力であることがわかる。

この力のことをその性質から「向心力」という。

角速度ωの回転運動が円周を 1 周するのにかかる時間Tは

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

と表され、これを周期と呼ぶ。このことから、質点が円周を単位時間に何周出来るかを求めることが出来る。この物理量のことを周波数νという。周波数νは

$$\nu = \frac{1}{T}$$

である。周波数と角速度の関係は

$$\omega = 2\pi\nu$$

となっているので、角速度のことを角周波数と呼ぶこともある。

■　重力下での投げ上げ運動

速さ v_0 で斜め上に角度で投げられた物体が、再び同じ高さに戻る地点が最も遠いのはいくらの角度で投げ上げられたときか。

［解答］投げ上げた質点の運動を水平方向（x 軸）と鉛直方向（z 軸）に分解して考える。

投げ上げたときの座標を $(0,0)$ とする。

x 方向は力が加わらないので等速運動、z 軸方向は重力による等加速度運動となる。

それぞれの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

を解くと、

$$x = v_{x0}t + x_0$$

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

となる。初期条件から

$$x = v_0\cos\theta \cdot t$$

$$y = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

投げ上げた質点が同じ高さに戻ってくるときの時間は

$$0 = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt)t$$

$$t = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

と書ける。このときの x 座標は

$$x = v_0\cos\theta \cdot \frac{2v_0}{g}\sin\theta = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} \cdot 2\cos\theta\sin\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

となる。

$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ の範囲でこの x の値が最大になるのは

$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 、即ち $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ のときである。

■ スペースシャトルは地表から 300km の高さの軌道を回っている。地球の半径 $R = 6.37 \times 10^3 km$ の一様な球とするとき、この軌道を回るスペースシャトルに働く重力加速度の値を求めなさい。又、地球表面の重力と比べて何%小さいか求めなさい。答えは有効数字 2 桁で示しなさい。地表での重力加速度は $9.8 {m}/{s^2}$ である。

［解答］

質量 M のスペースシャトルが受ける重力は重力定数を G とすると

$$\frac{GM}{(R+300)^2} = \frac{GM}{R^2(1+{300}/{R})^2} \approx \frac{GM}{R^2}(1-2\cdot {300}/{R})$$

$$= \frac{GM}{R^2}\cdot(1-\frac{6}{63.7}) = 0.9058\ldots\cdot\frac{GM}{R^2}$$

と書ける。なのでスペースシャトルが受ける重力は

$$9.8 {m}/{s^2} \cdot 0.906 = 8.9 {m}/{s^2}$$

となり、地表より約９％小さい。

■ ある物体（質量 m ）が空気中を運動するとき、速さ v の 2 乗に比例する抵抗力 $m\beta v^2$ 受けると仮定する。

（1） この物体の初速度０で落下させたときの運動方程式を書きなさい。

鉛直下向きを正とすると、この物体の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg - m\beta v^2$$

と書ける。

（2） この物体の終端速度を方程式を解かずに求めなさい。

速度の変化がなくなると終端速度となるので、 運動方程式の左辺をゼロと置くことが出来る。即ち

$$0 = mg - m\beta v^2$$

となるので、終端速度は

$$v_{final} = \sqrt{\frac{g}{\beta}}$$

である。

(3)　この物体の終端速度を運動方程式を解いて求めなさい。

運動方程式を整理すると

となる。

$$\frac{dv}{g - \beta v^2} = dt$$

両辺を積分すると左辺は

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \beta v^2} = \int_0^v \frac{1}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{\beta} v\right)\left(\sqrt{g} + \sqrt{\beta} v\right)} dv$$

$$= \frac{1}{\beta} \int_0^v \frac{1}{\left(\sqrt{g/\beta} - v\right)\left(\sqrt{g/\beta} + v\right)} dv = \frac{1}{2\sqrt{g\beta}} \int_0^v \left(\frac{1}{\sqrt{g/\beta} - v} + \frac{1}{\sqrt{g/\beta} + v} \right) dv$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g\beta}} \left[-\ln\left(\sqrt{g/\beta} - v\right) + \ln\left(\sqrt{g/\beta} + v\right) \right]$$

となり、右辺は

$$\int_0^t dt = t$$

となる。

これらの式を整理すると

$$\ln\left(\frac{\sqrt{g/\beta} - v}{\sqrt{g/\beta} + v} \right) = -2\sqrt{g\beta}\, t$$

$$v(t) = \sqrt{g/\beta} \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{g\beta} t}\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{-2\sqrt{g\beta} t}\right)}$$

　この式で時間を無限大にすると、指数関数の部分はゼロになるのでそのときの速度（終端速度）は

$$v = \sqrt{g/\beta}$$

となる。

(予備知識 1)

次の形の関数の微分について考える。

$$y = \ln x$$

の微分は

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\ln(x+dx) - \ln(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\ln(x+dx/x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\ln(1+dx/x)}{dx}$$

$$= \lim_{dx \to 0} \frac{1}{dx} (\ln(1) + dx/x) = \frac{1}{x}$$

となる。即ち、逆に

$$y = \frac{1}{x}$$

　を積分すると

$$\int y dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

となる。

(予備知識２)

関数 $y = f(x')$ の中の変数 x' が別の関数 $x' = g(x)$ の形で書かれている時、即ち

$$y = f(g(x))$$

と書ける時、その微分は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(x')}{dx'} \frac{dg(x)}{dx}$$

となる。

それでは、積分の場合はどうなるだろうか？