平成 26 年度

物理学Ｉ　講義資料

第 6 回

中間試験解答

生命医科学部医工学科

2014/5/22

中間試験の問題についてもう一度考え、これまでの講義の復習をする。

[1]　次の問に答えなさい.

(1)　質点と剛体の違いについて説明し，質点と剛体が静止する条件をそれぞれ述べなさい.

質点：　大きさを持たず、重さのみある物体。重さのみある理想的な点として取り扱うことが出来る。

剛体：大きさも重さもある物体。しかし、その大きさや、形は変わらないとする。即ち剛体内の各部分の距離、位置関係は変わらないため連続した質点の集まりとして考えることが出来る。

(2) 慣性モーメントについて説明しなさい。

剛体の回転運動において、ある力のモーメントを受けた時そのモーメントに対して生じる回転運動のおこりやすさ（大きさ）を決める物理量。

並進運動の質量に対応する。

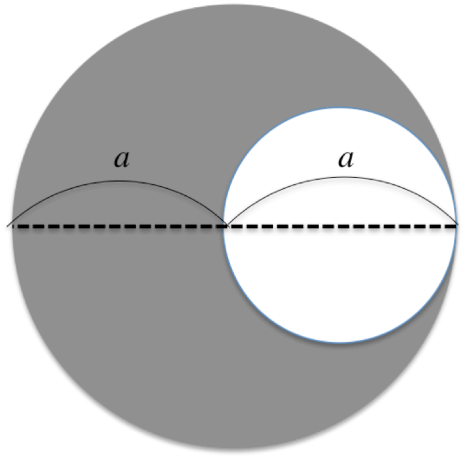
剛体の質量は不変として扱えるが、慣性モーメントは、回転軸の周りに剛体の質量がどのように分布しているかによって変わる。

剛体（密度をρとする）ある軸（例えばここでは z 軸とする）周りの慣性モーメントの定義は

$$I_z = \int_V r_z^2 \rho(x,y,z)dV = \int_V (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dV$$

である。

[2] 次のような一様な形の板の質量中心の位置を求めなさい。この板の質量を M とする。



半径 a の板から半径 $a/2$ の板をくりぬいているので、くりぬかれた板と、くり抜いた板を合わせると、元の半径 a の板となることを使う。
この板の重心は半径 a の中心になるので、ここを原点ととる。
くり抜く前の板 S_0 、およびくり抜いた板 S_2 の面積はそれぞれ

$$S_0 = \pi a^2$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\pi a^2$$

である。なので、くり抜かれた板の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{3}{4}\pi a^2$$

となる。

くり抜かれた板の質量 M が　なので、くり抜いた板の質量は $\frac{1}{3}M$

となる。

次に、それぞれの重心について考える。くり抜いた板の重心は $(\frac{1}{2}a, 0)$ である。
くり抜かれた板の重心も同じ軸上にあり、その位置を $(r_G, 0)$ とする。
　くり抜かれた板、くり抜いた板の２つの物体を合わせた物の重心が原点 $(0,0)$ であるので、重心の定義から

$$0 = \frac{r_G \cdot M + \frac{1}{2}a \cdot \frac{M}{3}}{M + \frac{M}{3}}$$

この式を解くとくり抜かれた板の重心は

$$\boxed{r_G = -\frac{a}{6}}$$

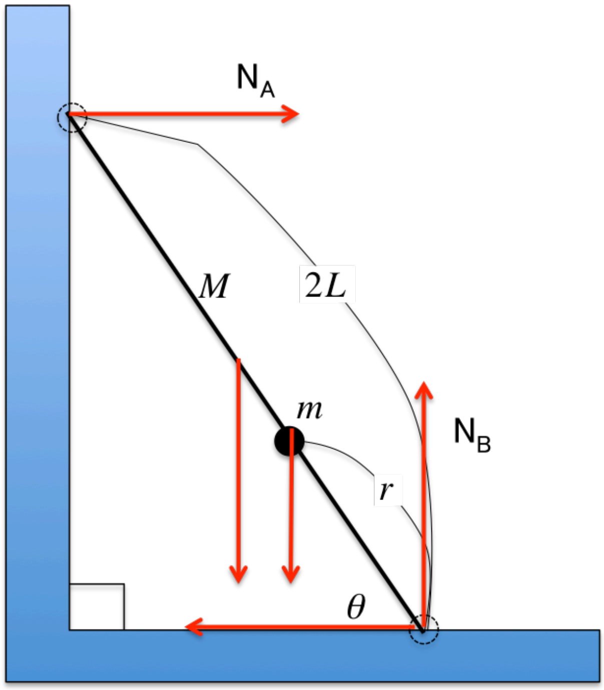
となる。

　即ち、この板の重心は元の円の中心とくり抜いた円の中心を結んだ軸上にあって、元の円の中心から $\frac{a}{6}$ 離れたところにある。

[3]　長さ$2L$、重さMの一様なはしごが図のように床と角度θで壁に立てかけてある。　このはしごに重さmの人がはしごの下（床に接している点 B）から距離rの点 C まで登ったときについて考える。壁とはしごの間には摩擦は無く、床とはしごの間には静止摩擦係数μの摩擦力が働いている。
以下の問いに答えなさい。ここでは人は大きさを無視して質点として取り扱う。

（1）　人が登った時のはしごに働く力をすべて図に書き入れ、はしごが倒れず、止まってままでいる為の条件を式で書きなさい。

解答：



水平方向の力の釣り合い。水平方向、鉛直方向の力の大きさのみ考えると、
壁からの力＝床からの最大摩擦力

$$N_A = F_B = \mu N_B$$

鉛直方向の釣り合い
床からの抗力＝はしごの重さ＋人の重さ]

$$N_B = Mg + mg$$

重心の周りの力のモーメント（反時計回りを正とすると）

$$N_B \cdot L \cdot \cos\theta - mg \cdot (L-r) \cdot \cos\theta - \mu N_B \cdot L \cdot \sin\theta - N_A \cdot L \cdot \sin\theta = 0$$

のとき、棒にかかる力は釣り合って静止している。

（2）人が登った時のはしごが倒れない為の最小の角度θ_0を求めなさい。　（この角度θ_0より小さな角度ではしごを立てかけるとはしごは倒れてしまう）

[解答]
今、最大摩擦力が働いているときを考えているので

$$N_B \cdot L \cdot \cos\theta - mg \cdot (L-r) \cdot \cos\theta \le 2\mu N_B \cdot L \cdot \sin\theta$$

が成り立っている時、この棒は倒れない。
即ち、

$$N_B \cdot L \cdot \cos\theta - mg \cdot (L-r) \cdot \cos\theta > 2\mu N_B \cdot L \cdot \sin\theta$$

となるとこの棒の力のモーメントの釣り合いが破れて、たおれてしまう。

この最後の式を変形すると最初の 2 式の関係を 3 番目の式に代入すると、

$$\tan\theta < \frac{M \cdot L + m \cdot r}{\quad}$$

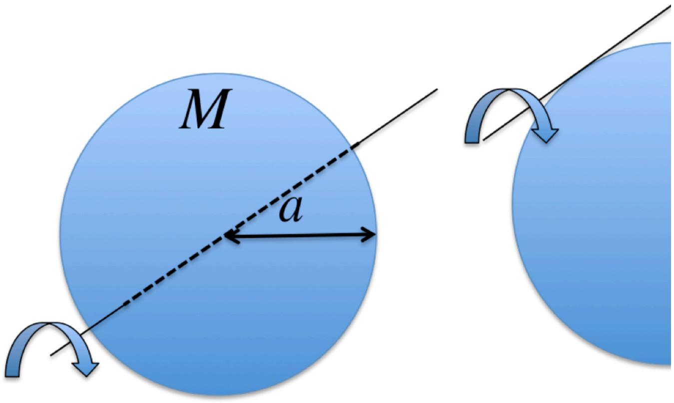
[4]　半径aで、質量Mの一様な球の中心を通る軸の周りの慣性モーメントと、球の表面に接する軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。

［解答］：

密度をρとすると、質量Mとの関係は

$$M=\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\rho$$

となる。



球の中心を通る軸をx軸とすると、$(x,x+dx)$にある円盤の半径は$\sqrt{a^2-x^2}$となる。半径r円盤の中心を通り、円盤に垂直な軸の周りの慣性モーメントは

$$dI_x=\int_0^r\int_0^{2\pi}\alpha^2(\rho dx)\alpha d\alpha d\varphi$$

$$=(\rho dx)\int_0^r\int_0^{2\pi}\alpha^3 d\alpha d\varphi$$

$$=(\rho dx)\left[\frac{\alpha^4}{4}\right]_0^r[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}r^4\rho dx$$

となる。従って、球のx軸の周りの 慣性モーメントは

$$I_x=\int dI_x=\int_{-a}^a\frac{\pi}{2}r^4\rho\,dx$$

$$=\int_{-a}^a\frac{\pi}{2}(a^2-x^2)^2\rho\,dx=\frac{8}{15}\pi a^5=\frac{2}{5}Ma^2$$

即ち、

$$\boxed{I_x=\frac{2}{5}Ma^2}$$

また球の表面に接する軸の周りの慣性モーメントは、球の中心を通る軸の周りの慣性モーメントと、球の重心に全質量が集まっていると考えたときの表面に接する軸の周りの慣性モーメントの和となる。

即ち

$$\boxed{I=I_x+Ma^2=\frac{7}{5}Ma^2}$$