

平成 26 年度
物理学基礎 講義資料
第 7 回

作用・反作用の法則

—物体同士の力学的相互作用—

生命医科学部医工学科

2014/5/29

作用反作用の法則を通して、慣性質量、運動量の概念を学ぶ。
運動量保存の法則の使われ方も学ぶ。

- 作用・反作用の法則と慣性質量、運動量保存の法則
- 例題
- ロケットの飛行原理
- 演習問題

■ 作用・反作用の法則 (運動の第3法則)

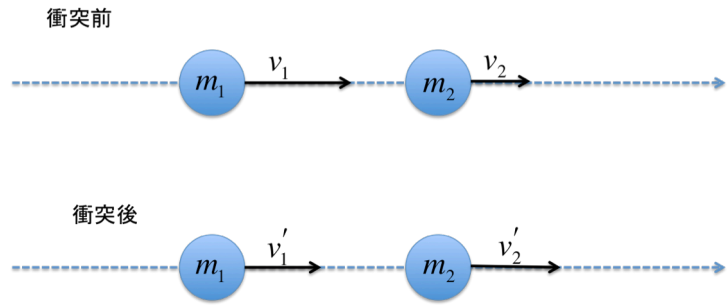
図で示すように2つの物体の系を考える。物体Aが物体Bに力 \vec{F}_{AB} を及ぼしているとき、物体Bは物体Aに大きさが同

じで向きが逆の力 $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

を及ぼす。この力は引力(引っ張り合う力)の場合や斥力(反発する力)の場合がある。このような力としては、ひもでつながった物体間にかかる張力

や、ひもなどでつながっていないが重力、クーロン力、ローレンツ力(荷電粒子間に働く力)などがある。

このように作用反作用のみで働く力を考えると、2つの質点の系では、それぞれの運動方程式を記述すると



$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{F}_{AB}$$

$$m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{F}_{BA}$$

となる。

作用反作用の法則から、この2つの式は力 \vec{F}_{AB} を使って次のように書くことができる。

$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{F}_{AB}$$

$$m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} = -\vec{F}_{AB}$$

この2つの式から、同じ大きさの力が加わった場合、その質点の加速度は質点の重さに反比例する。即ち、重い物ほど加速後が小さい、すなわち運動の変化が小さいと言える。状態の変化に対して変わりにくさを表す性質のことを**慣性**ということから、この質量は慣性質量とも呼ばれる。

この2つの両辺の和をとり整理すると、

$$\frac{d}{dt}(m_A v_A + m_B v_B) = 0 \text{ となる。}$$

この場合、作用反作用で働く以外の力がゼロであるので左辺がゼロとなり、時間微分さ

れる量 $m_A v_A + m_B v_B$ は時間によらず一定である。

ここで、 $p_i = m_i v_i$ を定義し、これを運動量と呼ぶ。系全体の運動量を P とすると

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d \sum_i p_i}{dt} = \frac{d}{dt} (p_A + p_B) = 0$$

となる。即ち、系全体として外から加わる力がない場合その系の運動量 P は変化せず一定である。

この関係を「運動量保存の法則」という。

■ 例題：ボール同士の衝突

図のように2つの球（質点と考える）同士の衝突について考える。

それぞれの質量を m_1 、 m_2 とする。この2つの球がそれぞれ速度 v_1 、 v_2 で衝突したとする。衝突後の速度を v'_1 、 v'_2 とする。

衝突前と衝突後の2つの球の間の相対速度は一定の比になることが知られており、この比 e のことを「反発係数」、または「跳ね返り係数」と呼ばれている。

$$-\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1} = e$$

この値は $0 \leq e \leq 1$ の範囲にある。

$e=1$ のときこの衝突は弾性衝突とよび、 $0 < e < 1$ のときは非弾性衝突、 $e=0$ のとき完全非弾性衝突と呼ぶ。

衝突現象では2つの質点の間での作用反作用の力以外には力が働いていないので運動量保存の法則が成り立つ。

即ち、

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

となる。

この式と、衝突前後の相対速度の比の関係式を用いて、衝突後の速度 v'_1 、 v'_2 を求めることができる。

■ ロケットの飛行原理

質量 M のロケットが単位時間 dt あたり質量 dM の燃料を速度 v' で噴射したとする。（簡単の為、ここでは重力の影響は考えない。）

運動量保存の法則

$$Mv = (M - dM)(v + dv) - dM \cdot v'$$

から、

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = (v + dv - v') \frac{dM}{dt}$$

とかける。 $\frac{dM}{dt}$ は単位時間あたりの燃料の消費率になるので一定値 R とする。また $v + dv - v'$ はロケットの速度に対する燃料の相対速度で $u = v + dv - v'$ と書くと、ロケットの運動方程式は

$$M(t) \cdot \frac{dv}{dt} = uR$$

となる。ここで uR は推進力と呼ばれる。それでは、ロケットの速度の変化を求めてみよう。

$$M \cdot dv = u \cdot dM$$

から、

$$dv = \frac{u}{M} dM$$

が得られる。両辺を時刻 t_i での速度を v_i 、質量 M_i とし、同様に時刻 t_f での速度 v_f 、質量 M_f として積分すると、

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = \int_{M_i}^{M_f} \frac{u}{M} dM$$

$$\begin{aligned} v_f - v_i &= u(\log_e M_f - \log_e M_i) \\ &= u \log_e \frac{M_f}{M_i} \end{aligned}$$

となる。

時刻での速度は相対速度 u と、質量比 $\frac{M_f}{M_i}$ が大きければ大きいほど速くなる。

多段式ロケットは放出した燃料以上に $\frac{M_f}{M_i}$ を小さくするので、最終速度 v_f を大きくするのに有効なことがわかる。

■ 演習問題

質量 m_1 、 m_2 の 2 つの球が完全非弾性衝突したときの衝突後の速度を求めなさい。
衝突前の速度を v_1 、 v_2 、衝突後の速度 v'_1 、 v'_2 とする。

完全非弾性衝突の場合には反発係数はゼロなので $-\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1} = 0$ が成り立つ。

解答：

運動量保存法則より

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

また、完全非弾性衝突なので、

$$v'_1 = v'_2$$

である。

即ち

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

となる。