**平成 26 年度**

**物理学Ⅰ　講義資料**

**第 7 回**

# 剛体の運動方程式

生命医科学部医工学科

2014/5/29

<u>目標：例を用いて剛体の運動の取り扱いについてについて理解する。</u>

- ■ 前回の宿題：回転軸の平行移動についての取り扱い
- ■ 様々な剛体運動
  - ➢ メトロノーム
  - ➢ 斜面を転がる円柱
- ■ 演習問題

■ 宿題：回転軸の平行移動についての取り扱い

質量$M$の剛体の重心の座標は$x-y$平面内にあるとし、その位置ベクトルを$\vec{r}_G$とする。このときのz軸周りの慣性モーメントと、z軸に平行で重心を通る軸の周りの慣性モーメントの関係を調べる。
剛体内部の任意の点$\vec{r}$は、次にように書くことが出来る。

$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}' \qquad (7.1)$$

$\vec{r}_G$とは、剛体内部の点の重心からの位置ベクトルである。この剛体のz軸周りの慣性モーメントは、

$$I_z = \int_V \rho(\vec{r})(x^2 + y^2)dxdydz \qquad (7.2)$$

と表すことが出来る。
(7.1)式より、(7.2)は

$$I_z = \int_V \rho(\vec{r})((x_G + x')^2 + (y_G + y')^2)dxdydz$$
$$= \int_V \rho(\vec{r})(x_G^2 + y_G^2)dx\,dy\,dz + 2\int_V \rho(\vec{r})(x_G x'^2 + y_G y')^2 dxdydz + \int_V \rho(\vec{r})(x'^2 + y'^2)dxdydz$$

となる。
ここで、最後の式の第2項は重心の定義からゼロとなることがわかる。
第1項は、z軸から重心までの距離を$d = |\vec{r}_G|$とすると、

$$\int_V \rho(\vec{r})(x_G^2 + y_G^2)dxdydz = M(x_G^2 + y_G^2) = Md^2$$

となる。これは、z軸（回転軸）周りの重心の位置に剛体質量$M$のが集まった質点としての慣性モーメントである。また、第3項$\int_V \rho(\vec{r})(x'^2 + y'^2)dxdydz$は、剛体の重心を通りz軸に平行な軸の周りの慣性モーメントである。

『質量$M$の剛体の重心を通る1つの軸の周りの慣性モーメント$I_G$であるとき、この軸に平行で距離$d$だけ離れた軸の周りの慣性モーメント$I$は、

$$I = I_G + Md^2$$

となる。』　（「平行軸の定理」と呼ばれている。）

これからしばらく様々な剛体運動の例を用いて、剛体の運動方程式の使い方を学ぶ。

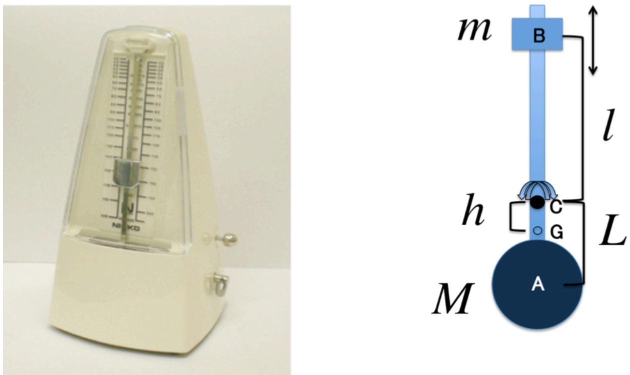
■ メトロノーム

メトロノーム（図の写真）は曲を演奏するときにテンポをとる為に使われる装置であるが、これは実体振り子の、重心が回転軸に近づくにつれて周期が長くなることを利用している。

メトロノームの構造を簡単に書くと図のようになる。

A は棒の端に固定された錘で重さは $M$ である。また B は重さ $m$ の錘で遊錘とよばれ、棒上を移動することができる。(固定錘は遊錘より十分重い。$M>m$)

棒は点 C で固定されていて、この点の周りに回転することが出来る。点 C からそれぞれの錘までの距離を $L$、$l$ とする。




図。メトロノームの写真とその仕組み

棒と 2 つの錘からなる実体振り子として考えると、この系の重心 G は（点 C を原点として考え、固定錘側を正ととると）

$$h=\frac{ML-ml}{M+m}$$

となる。　この実体振り子の角振動数 $\omega$ は $\omega=\sqrt{\frac{(M+m)gh}{I}}$ である。

このときの慣性モーメント $I$ は $I=ML^2+ml^2$ である。

例えば $M=10\times m$、$l=1\times L$　とすると角振動数は $\omega=\sqrt{\frac{9}{11}}\cdot\sqrt{\frac{g}{L}}\approx 0.9\sqrt{\frac{g}{L}}$ となる。

次に遊錘を移動させて $l=9\times L$ の位置にしたときには角振動数は

$\omega=\sqrt{\frac{1}{91}}\cdot\sqrt{\frac{g}{L}}\approx 0.1\sqrt{\frac{g}{L}}$ となる。

このように、メトロノームは遊錘の移動によって振り子の振動数を変えることができることがわかる。

■　斜面を転がる円筒

剛体の単純な運動のもう一つの例として、斜面を落ちていく剛体の運動を考える。
固定軸がないので、この場合の運動は重心の並進運動と、重心周りの回転運動に分けて考えられる。
この運動ではある平面にそってのみ動くことになるので、平面運動では自由度は最大で２、回転運動では重心を通りその面に平行な軸（垂直な軸の場合もある）の周りの回転なので自由度は１となり、最大自由度３の運動について考えればよいこととなる。

剛体の質量を$M$、重心の座標$\vec{r}_G$、外力の和を$\vec{F}$とすると並進運動の運動方程式は

$$M\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2}=\vec{F}$$

又、重心周りの慣性モーメントを$I_G$回転軸まわりの外力のモーメントを$N_\varphi$とすると回転運動の運動方程式は

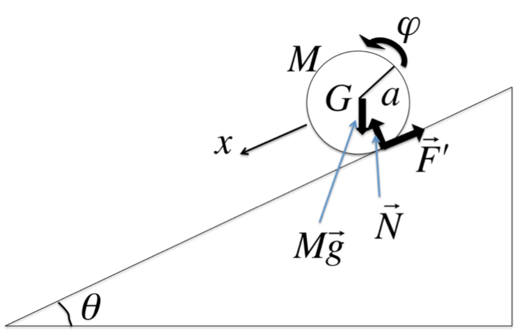
$$I_G\frac{d^2\varphi}{dt^2}=N_\varphi$$

と書くことが出来る。

それでは、円柱、または円筒が斜面を落ちていく時の運動について考えよう。
まず、この運動を考えるき
１．　滑らずに回転しながら落ちていく場合。
２．　滑って回転せずに落ちていく場合
の２通り考えられるが、どちらの場合の方が速く落ちていくだろうか？

結論：<u>2。滑って回転せずに落ちていく場合、の方が速く落ちる。</u>
なぜそう思うのだろうか？

実際に運動方程式を解いて考えてみよう。
回転しながら落ちていく場合：
図のように半径$a$、質量$M$で中心軸周りの慣性モーメントが$I_G$の円柱（円筒でもいい）が傾斜角度$\theta$の斜面を滑らず回転しながら転がり落ちていく場合について考える。



この円柱に働く外力は、重力と斜面からの垂直抗力、斜面にそって上向きに働く摩擦力である。
図のように座標をとると、この運動では斜面下向きの座標 $x$ と 回転角度 $\varphi$ の２つが運動の変数で、運動の自由度は２である。
この円柱の並進運動の運動方程式は、

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\theta - F'$$

回転運動の運動方程式は

$$I_G\frac{d^2\varphi}{dt^2} = aF'$$

と書ける。
この運動では並進運動を妨げる働きをしている摩擦力が回転運動の駆動力になっていることがわかる。
今、この円筒は滑らずに回転しながら落ちていっているので、座標 $x$ と回転角度 $\varphi$ の間には次の関係がある。

$$x = a\varphi$$

初期条件として $t = 0$ で $x = 0$ 、 $\varphi = 0$ とする。
これらの式から、次の式が導かれる。

$$(M + \frac{I_G}{a^2})\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\theta$$

この運動方程式を解くと

$$(M + \frac{I_G}{a^2})\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\theta$$

となる。この結果から、円柱（または円筒）が斜面を滑らずに転がり落ちていく時、その重心の並進運動は、加速度 $\dfrac{Mg\sin\theta}{(M + \frac{I_G}{a^2})}$ の等加速度運動となる。

次に円柱が回転せずに滑りながら斜面を落ちていく場合を考えてみる。
この場合は回転運動はなく、摩擦もないことになるので並進運動は質点の場合と同じ運動方程式となる。
即ち、

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\theta$$

となり、この場合の重心の並進運動は、加速度加速度 $g\sin\theta$ の等加速度運動となる。

このことから、滑って回転せずに斜面を落ちていく場合の方が大きな加速度の等加速度運動であることがわかる。
それでは、同じ重さの円柱と円筒ではどちらの方が加速度は大きいだろうか？
円柱の重心を通って柱に平行な軸の周りの慣性モーメントは

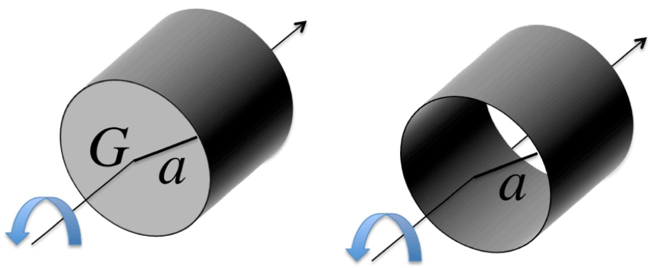
$$I_{G:enchu} = \frac{M}{2}a^2 : \text{円柱}$$

となり、加速度は $\frac{2}{3}g\sin\theta$ となる。
円筒の場合は

$$I_{G:entou} = Ma^2$$

で、加速度は $\frac{1}{2}g\sin\theta$ となる。
即ち、加速度は円柱の場合が大きく、薄い円筒の場合にはその $\frac{3}{4}$ である。

[演習問題]
半径 $a$ 、質量 $M$ がともに同じの円柱（中が詰まっている）と、円筒（中が詰まっていない。厚さは半径に比べて薄いとし無視してよい。）の重心を通り、柱の方向に平行な軸の周りの慣性モーメントの求め方を示しなさい。



解答：

円柱、円筒ともに長さを $l$ とする。

円筒の場合、密度は $\rho = \dfrac{M}{\pi a^2 l}$ である。

この軸の周りの慣性モーメントは x 軸に垂直な平面で厚さ $l$、半径 $a$ の円盤に分割して求めることが出来る。

$$I_{enchu} = \int \rho \xi^2 dV = \rho \iiint \xi^2 \cdot \xi d\xi d\varphi dx$$
$$= \rho \int_0^a \xi^3 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l dx = \frac{1}{2}\pi\rho l a^4 = \frac{M}{2}a^2$$

となる。

次に薄い円筒の場合は軸から距離　の所に質量が集まっているので

面密度は $\rho = \dfrac{M}{2\pi a l}$ である。

$$I_{entou} = \int \rho a^2 dS = \rho a^2 \int_0^{2\pi} a\, d\varphi \int_0^l dx$$
$$= 2\pi\rho l a^3 = Ma^2$$

となる。