平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第 8 回

仕事と力学的エネルギー

−運動の保存量（２）−

生命医科学部医工学科

2014/6/5

質点に働く仕事、運動エネルギーの定義を理解し、仕事と運動エネルギーの関係を学ぶ。

■　前回の復習と運動量の意味について

■　仕事とエネルギー

■　演習問題

■ 前回の復習：運動量について

前回、物体の運動に関する物理量として運動量を定義した。

運動量の定義： $\vec{p} = m\vec{v}$

2質点の衝突のように、外力が働かない運動については、系全体の運動量は保存する。

■ 運動量の物理的意味と力積

運動量は運動の勢いを表すと言える。例えば同じ速さでも、重たい物ほど運動量は大きくなり、運動の勢いが大きい（同じ速度で物がぶつかった時重たい物ほど大きな衝撃を受ける）。

運動方程式を運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ を使って表すと、

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

と書くことが出来る。

物体が力 $\vec{F}$ を時間 Δt の間受けると運動量は力×時間だけ変化する。反対に、力が働かない時には、その物体(質点)の運動量は保存することがわかる。　これは、物体の数が増えても成り立つ。(前回、取り扱った衝突の場合は２つの物体について)

運動方程式からの導出

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

両辺に dt を掛けて、積分すると、

$$\vec{F}(t)$$

$$\text{左辺＝}\quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot dt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 = \Delta p$$

となり、運動量の変化を表す。

時間よらない一定の力が働いている場合､右辺は

$$\text{右辺＝} F \cdot \left(t_2 - t_1\right) = F \cdot \Delta t$$

右辺の**『力×時間』**で表される量を<u>**力積**</u>という。

力積が働くと､運動量が変化する。　反対に力積が無い場合には運動量は変化しない。

２つの物体（質点）が衝突してお互いに及ぼし合う力は、作用反作用の法則より、互いに逆向きで大きさが同じである。　この２つの力のベクトルの和は０である。　このよう

な力は内力と言う。

『内力の場合、実質的に働く力は 0 であるので、力積は無く、2 つの物体の運動量の和は一定である。（保存される。）：*運動量の保存の法則*』

力積は、物体（質点）が受ける力が時間の関数であっても定義できる。

$$力積の定義：\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot dt$$

一般に力積を求めるには力がどのような時間の関数 $\vec{F}(t)$ になっているか解っていなければならない。しかし、力 $\vec{F}(t)$ が解っていなくても、時刻　と　に置ける運動量が解っていれば、その間に質点が受けた力積を求めることが出来る。

例：　野球のバットでボールを打つ場合を考えてみると、バットがボールに与える力は短い時間だけ有り、その間の力の大きさの時間変化は解らない。（大きさだけでなく、向きも変わっていると考えられる。）　このような、瞬間的に働く力を<u>撃力</u>という。
しかし、ボールがバットから受ける力積は

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2(t_2) - p_1(t_1)$$

とボールの運動量の変化から求めることが出来る。
このことから、物体にかかっている力の情報がなくても限られた情報（たとえば運動量）からその現象について考えることは出来る。
例えば、<u>式　</u>から
『運動量の変化に対しては、小さい力でも長く継続して加えると短時間に大きい力を加えたのと同じ効果がある』と言うことが出来る。

■ 仕事と力学的エネルギー

仕事やエネルギーという言葉は日常生活でもよく使われる。物理では、『仕事』は日常語を借りてきて、物理では限定した意味で使っている。『エネルギー』はもともと物理学で使っている言葉を日常でも使っているが、物理学での意味と日常で使われている意味には少しずれが有る。
このため、まずそれぞれの意味を正確に理解する必要が有る。
『仕事』の定義：力 $\vec{F}$ を受けて物体が力の方向に距離 $\Delta\vec{x}$ だけ動いた場合、力 $\vec{F}$ は大きさ $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$ 　の仕事をしたと言う。　また物体は仕事 ΔW をされたと言う。

このことを一般化して積分の形で書くと

$$dW = \int_x^{x+\Delta x} F \cdot dx$$

となる。

仕事の単位：MKS 単位系では J (ジュール)を用いる。　$1J$ は、$1N$ の力でその力の方向に $1m$ だけ動かすときの仕事の大きさを表す。　すなわち、

$$1[J] = 1[N] \cdot 1[m] = 1\left[kg \cdot m^2 / s^2\right]$$

である。　仕事の量だけでなく、仕事の速い、遅いを考えるときには単位時間あたりの仕事が問題となる。　単位時間あたりの仕事を**仕事率**といい、単位としては $[W]$ (ワット)を用いる。1 秒間に $1J$ の仕事をするときに $1W$ の仕事率という。

さて、次は運動方程式を次のように取り扱ってみる。

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

の両辺を x で積分すると、

$$m\int_x^{x+\Delta x} \frac{dv}{dt}dx = \int_x^{x+\Delta x} F \cdot dx$$

となる。

左辺は

$$m\int_x^{x+\Delta x} \frac{dv}{dt}dx = m\int_x^{x+\Delta x} \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2}m\int_x^{x+\Delta x} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] \cdot dt = \frac{1}{2}m\int_{v_1}^{v_2} d\left[v^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

となる。　ここで、もう一つ運動を表す量として、運動エネルギーを $\frac{1}{2}mv^2$ と定義すると、物体にされた仕事は運動エネルギーの変化になったとみることが出来る。

物体に働く力が、ある関数 $U(x)$ の位置に関する微分で表されるとき、すなわち

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

とかけるとき、このような力を<u>保存力</u>と言う。　このときの位置の関数で表される量

$U(x)$を位置エネルギーと言う。

問い：保存力にはどのような物が有るだろうか？
答え：　重力や静電気力（クーロン力）は保存力である。
自分で確かめてください。

力が保存力であるとき、物体が距離$\boldsymbol{\Delta x}$移動する間にされる仕事の量dWは

$$dW = \int_x^{x+\Delta x} F \cdot dx = -\int_x^{x+\Delta x} \frac{dU(x)}{dx} \cdot dx = U(x) - U(x+\Delta x) = U(x_1) - U(x_2)$$

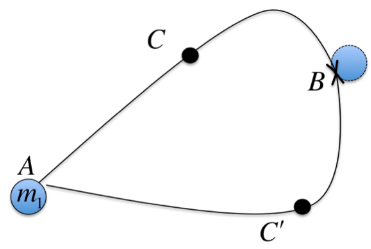
と書くことができる。即ち、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = U(x_1) - U(x_2)$$

となる。

これより、物体に働く力が保存力である場合、物体が運動している間は運動エネルギーと位置エネルギーの和(力学的エネルギー)は保存されることが解る。:**『エネルギー保存の法則』**

また、このことから力$\vec{F}$が保存力の場合、この力$\vec{F}$がする仕事は始点と終点の位置だけで決まり、途中の経路によらないことが解る。



$$W = \int_{A,C}^{B} F(x) \cdot dx = \int_{A,C'}^{B} F(x) \cdot dx$$

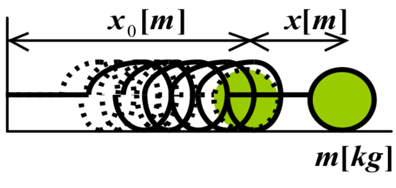
即ち、

$$\int_{A,C}^{B} F(x) \cdot dx - \int_{A,C'}^{B} F(x) \cdot dx = \int_{A,C}^{B} F(x) \cdot dx + \int_{B}^{A,C'} F(x) \cdot dx = 0$$

参考：運動エネルギー、位置エネルギーを力学的エネルギーと言う。(参考：　エネルギーは他の形になることもあり、熱や電気、光のエネルギーがある。)

■　演習問題

図のように一端を固定したバネの他端に質量$m[kg]$の質点を取り付け、力を加えて元の長さ(自然長$x_0[m]$)から$x_1[m]$だけ伸ばした。　バネ定数をk　とする。バネの伸びが元に戻るまでにバネが質点にする仕事を求めなさい。また、バネの力は



保存力であることを示しなさい。

解答：
バネを $x_0[m]$ から $x_0+x_1[m]$ までのばすのにした仕事は

$$W=\int_0^{x_1}-kx\cdot dx=-\frac{1}{2}kx_1^2=U(x_0)-U(x_0+x_1)$$

である。また、

$$U(x_0)=0$$

なので、今、

$$U(x_0+x_1)=\frac{1}{2}kx_1^2$$

である。

x_0+x_1 までのばして手を離したとする。

この時のバネの運動は運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

から、

$$x(t)=x_0+x_1\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t)$$

と書くことが出来る。
この質点が、元の長さの地点を通るときの速度は

$$v(x_0)=\sqrt{\frac{k}{m}}x_1$$

となる。 このときの質点の運動エネルギーは

$$E(x=x_0)=\frac{1}{2}kx_1^2$$

となる。
即ち、手を離した地点と、元の長さの地点での力学的エネルギーの関係は

$$E(x = x_0) + U(x = x_0) = E(x = x_0 + x_1) + U(x = x_0 + x_1)$$

が成り立つ。