平成 26 年度

物理学Ⅰ　講義資料

第 8 回

剛体の運動方程式

生命医科学部医工学科

2014/6/5

<u>目標：剛体の運動の例としてバットやラケットなどの撃力を与える運動の取り扱い方、考え方を学ぶ。</u>

- ■ 撃力とは
- ■ バットを振る運動
- ■ 演習問題

■ 撃力：打撃の中心

野球でのバッターの「快心のあたり」、テニスのプレーヤーの「気持ちのいいショット」などはバットやラケットのある点にうまくボールが当たったときに出ると言われる。このような点がバットやラケットに有るのだろうか？　それとも、何か打ち方に決まりが有るのだろうか？

力学の考え方から、この問題を考えてみる。

次のような実験をしたとする。図のような長い棒の上端を持ってつり下げる。反対側の手で、棒のいろいろな高さの点を水平に叩く.（バットを使ってもいいが、簡単のため一様な太さの棒について考える。

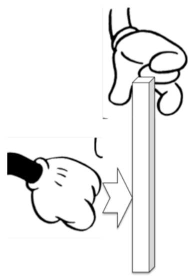

図 8.1

上の方（つり下げた点の近く）を叩くと、叩いた方向に外れるだろう。また、下の方を叩くと、叩いた方向と反対に外れる。　このことから、どこかその間にその点を叩いても棒が外れないところが有ると予想される。　このような点を『打撃の中心』という。
この点にボールが当たっても、持っている点（今の場合は上端）が動かない点である。そのため、ボールが当たっても手は衝撃を受けない。

それでは、この「打撃の中心」を求めてみよう。

簡単のため、滑らかな平面上に置かれた一様な棒に水平にボールが当たった場合を考える。　（棒のすべての点は水平面に平行に運動するので、平面運動として考える。）
グリップ位置を指定せずに、ボールが当たる位置を決めたときに衝撃を受けないグリップ位置を求めることとする。

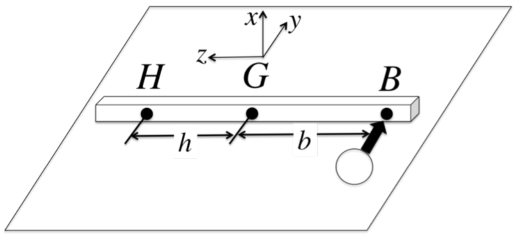

図 8.2

図の点Bにボールが当たったとき、この<u>**剛体（一様な棒）の運動**</u>は重心Gの並進運動と、重心周りの回転運動で表される。
剛体（一様な棒）の質量をM、ボールが棒に与えた力（撃力）を$\vec{F}(t)$とすると、重心の並進運動の方程式は

$$M\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2}=\vec{F}(t) \tag{8.1}$$

である。また、重心を通り面に垂直な軸（x 軸）の周りの慣性モーメントをI_Gとし、重心の周りの回転角をφとすると重心周りの回転の方程式は

$$I_G\frac{d^2\varphi}{dt^2}=bF(t) \tag{8.2}$$

となる。

ただし、$b = \left|\vec{r}_B - \vec{r}_G\right|$ (8.3)

で、$\vec{F}(t)$ は棒に対して垂直とした。$\vec{F}(t)$ の関数は解らないが、式(8.1)と式(8.2)をボールが棒に当たる前の時刻　から棒から離れた時刻 t_1 までを積分すると、時刻 t_2 における重心の速度と回転の角速度の大きさはそれぞれ、

$$\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\vec{p}}{M}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{bp}{I_G} \tag{8.4}$$

となる。ただし、

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt, \quad p = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt \tag{8.5}$$

は、この時間にボールが点 B に与えた<u>力積</u>と、その大きさである。ここでは、この棒はボールに当たる前は静止しているとするとした。

$$\frac{d\vec{r}_G(t_1)}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi(t_1)}{dt} = 0 \tag{8.6}$$

この仮定は実際にバットやラケットが使われる状況とは異なるが、打撃の瞬間に手に加わる衝撃の大きさを考えるのに影響はない。

これから解るように、棒に力積 $\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$ が与えられた後に剛体は重心の周りに(8.6)式で与えられる一定の角速度 $\omega_G = \dfrac{d\varphi(t_2)}{dt}$ で回転、重心は一定速度 $\vec{v}_G = \dfrac{d\vec{r}_G(t_2)}{dt}$ で直線運動をする。

これを詳しく見ると、並進運動の効果は剛体全体を＋y 方向に動かすが、回転運動は重心より右の B に近い部分は＋y の方向へ、B より遠い部分は−y の方向へ動く。

このことから考えると、撃力が加えられている瞬間とその直後には制したままの点 H がある。

いま、

$$h = \left|\vec{r}_H - \vec{r}_G\right| \tag{8.7}$$

とする。

撃力をうけた直後の棒のすべての点の水平方向の速度は y 成分のみで重心の速度は

$v_G = \left|\vec{v}_G\right|$、B、H での速度は

$$v_B = \vec{v}_G + b\omega_G = \frac{p}{M} + b\omega_G \qquad (8.8)$$

$$v_H = \vec{v}_G - b\omega_G = \frac{p}{M} - b\omega_G \qquad (8.9)$$

となる。この式より v_H が 0 になるような h を求めると、

$$h = \frac{I_G}{Mb} \qquad (8.10)$$

となる。

即ち、点 B に撃力を受けた時その瞬間動かない点を求めたが、、実際はバットやラケットを持った時そのグリップ位置 H は決まる。　その場合、どこにボールを当てれば（打撃中心）手には大きな衝撃を受けないように出来るかが解る必要が有る。　その解は(8.10)式を b について解けばよい。即ち、

$$b = \frac{I_G}{Mh} \qquad (8.11)$$

となる。

■ バット（ラケット）を振る。

これまでの解析をさらに進めて、もう少し具体的にバットやラケットの振り方について力学的に考えてみよう。といっても、問題を簡単化するため図 8.3 のような形状のバットを考える。（実際の形状のバットの場合はコンピュータによる数値計算が必要になる。）

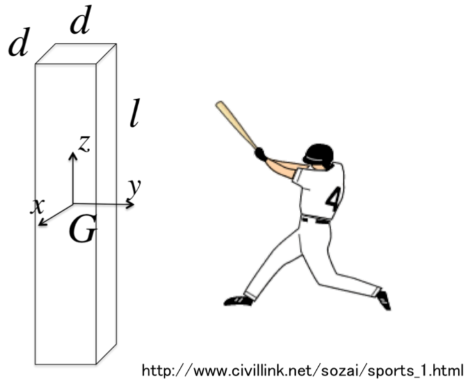

図 8.3

この断面は $d \times d$ の正方形で、長さが l 質量が M の一様な棒として考える。また $d << l$ として計算していく。重心を原点とする座標をとり、重心を通り棒に垂直な軸（x 軸）の周りの慣性モーメント I_G は $\frac{1}{12}Ml^2$ である。この棒を持って振り回すのに、力を加える位置と方向で、ボールに与える効果がどのように違うか考える。力の効果を比較するのに、一定の力を加えた場合にバットの重心や、注目する点（ボールが当たる点）の加速度を目安にする。上手なスイングはあまりバットがぶれずにほぼ同じ面内をバットが動くので、ここでも同じ平面内の棒の運動として取り扱う。

➢ 典型的な力の加え方と棒の運動。

（1）　棒の重心 G を握って、棒の軸に垂直な y 方向に一定の力 $F_G(=F)$ を加えた場合。

この力による重心の周りのモーメントは0なので、<u>棒は回転せず</u>にy方向に<u>並進運動のみ</u>する。

このときの並進運動の加速度は

$$a = \frac{F}{M} \tag{8.12}$$

となる。(バットやラケットなどでは重心の位置を持つことはないが、バトントワリングなどでは重心の位置を持つことが有る。)

(2) 次に、同じくy方向に棒の端に同じ大きさFの力F_Bを加えた場合。

このときの棒の並進運動は同じく(8.12)式で表される。

この場合、重心周りの回転運動も有り、点Bでの加速度は重心より大きくなる。回転運動は

$$I_G \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{l}{2} F \tag{8.13}$$

と書けるので、角加速度は

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{lF}{2I_G} = \frac{6F}{Ml} \tag{8.14}$$

である。なので、力が加わった時の点Bでの加速度はy方向を向いていて

$$a + \frac{l}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{F}{M} + \frac{3F}{M} = 4a \tag{8.15}$$

となる。

(このことから大きさFの力で加速度4aを与えることが出来ること言うこと)

(3) 棒の端に軸に平行(z方向)に同じ大きさFの力$F_{B'}$を加えた場合。

この力は重心周りにモーメントを持たないので(1)の場合と同様に並進運動しかおこらず、その加速度の方向はz方向である。

(4) y方向に棒の端に力F_B以外に、もう一点例えば端から$\frac{l}{10}$だけ離れた点Cにも力F_Cを加えた場合。この時回転を起こさせずに、並進運動のみ起こさせる為にはどうしたらいいだろうか。

並進運動の方程式から

$$Ma = F_B + F_C \tag{8.16}$$

回転運動の方程式から

$$I_G \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}lF_B + \frac{2}{5}lF_C = 0 \tag{8.17}$$

となり、

$$F_C = -\frac{5}{4}F_B \tag{8.18}$$

である。

即ち、重心において同じ加速度を得るには点 B には加速度と逆の向きの力で 4 倍、点 C には同じ向きで 5 倍の力を変えなければならない。

野球のバットのようにグリップ部分が細く、先が太くなっていると重心の位置がグリップ位置から遠いところにある場合は、この倍率はもっと大きくなる。（自分でやってみてください）

（5）　(4)の場合と同じように y 方向に棒の端に力 F_B 以外に、もう一点例えば端から $\frac{l}{10}$ だけ離れた点 C にも力 F_C を加えた場合で、今度は並進運動がなく回転運動のみ起こさせる為にはどうしたらいいだろうか。

今度は並進運動の方程式、回転運動の方程式はそれぞれ

$$Ma = F_B + F_C = 0 \tag{8.19}$$

$$I_G \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}lF_B + \frac{2}{5}lF_C \tag{8.20}$$

となる。

即ち、

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{10}\frac{lF_B}{I_G} = \frac{6}{5}\frac{F_B}{Ml} \tag{8.21}$$

である。

この回転による点 B での加速度が a に等しくなるような力 F_B を求めると、

$a = \frac{l}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{3F_B}{5M}$ となり、 $F_B = -F_C = \frac{5}{3}F$ となる。

即ち、この場合はこの 2 点に働く力は偶力（大きさが同じで向きが反対の力）である。

➢ それでは、どのようにバットを振るとよいだろうか？
各瞬間のバットはそれ以前に受けた力によってきます並進速度と回転の角運動量をもっているので、ボールが当たったときのその並進速度や角速度の変化について考えればよい。

フルスイングの場合：　バットはボールに当たる瞬間、ボールが飛んでくる方向に対して垂直になり、ボールの方向に対して高速で運動していなければならない。最初はバットはその方向に向いていないので、バットの軸の向きを 180°以上回転させなければならない。
図 8.4（1）のように、大きくバットを回転させると、バットの重心周りの回転は小さく、並進のみが有るように見える。即ち(4)の場合と考えられる。
振り始めに大きく重心の位置を並進運動させるには(3) のように軸方向に力をかけるのがよい。
このままではバットの向きも、バットの運動の向きもボールが飛んでくる方向とは異なっているので向きを変えなければならない。
バットの重心の動きを見ると円運動に近い動きをしているので、向心力が有れば自然に回転する。
手の長さは有限なので、バットを軸方向に引き続けるわけにはいかず引きを止めたところで、そこを中心としてバットに向心力が働き、バットの重心が円運動をする。
このように振ると、大きな力をかけなくてもバットを速く振ることが可能となる。

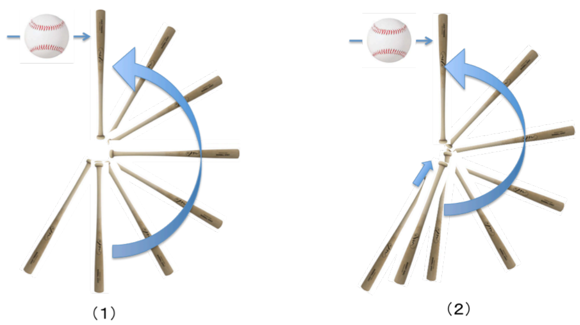

図 8.4

[演習問題]
一様な長さ l（太さは長さに比べて小さいとする）の重心周りの棒に垂直な軸の周りの慣性モーメントを求めなさい。（図 8.1 では x 軸に平行）

次に、この棒の一番端を持ったとき（即ち $h = \dfrac{l}{2}$ 　現実的ではないが）の打撃中心の位置を求めなさい。（棒の端からの位置を求めなさい。）

解答：

この棒の単位長さあたりの密度は $\rho = \dfrac{M}{l}$。重心は棒の中点になり、この点を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント I_G は

$$I_G = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho\, dr r^2 = \left[\frac{1}{3}\rho r^3\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12}Ml^2$$

となる。
これを式(8.11)に代入すると、

$$b = \frac{1}{6}l$$

棒の端からは

$$h + b = \frac{1}{2}l + \frac{1}{6}l = \frac{2}{3}l$$ となる。