平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第 9 回

極座標での運動の取り扱い

−円運動、振り子の運動−

生命医科学部医工学科

2014/6/12

これまで、運動方程式に従う質点の運動を記述するのに直交座標系をつかってきた。ここでは、万有引力などの力を記述するのに便利な極座標や円筒座標について学ぶ。

- ■　極座標について
  - ✧　2 次元極座標
  - ✧　３次元極座標

- ■　極座標による運動の記述
- ➢　2 次元
  - ✧　等速円運動
  - ✧　単振り子
- ➢　３次元
  - ✧　万有引力

- ■　演習問題

■ 極座標

➢ 2次元極座標

直交座標系では原点を通り直交する x 軸、y 軸に対して、点 P の位置を (x, y) で表し、

この位置ベクトルは x 方向、y 方向の単位ベクトル $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$ を用いて

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \qquad (9.1)$$

と表すことが出来る。図 9.1 に示すように、極座標では (r, φ) を用いて点 P を表す。 ここここで r を動径といい、この大きさは原点 O から点 P までの距離 $|\vec{r}|$ に等しい。φ は方位角（または偏角）といい、x 軸と位置ベクトル $\vec{r}$ との角度である。

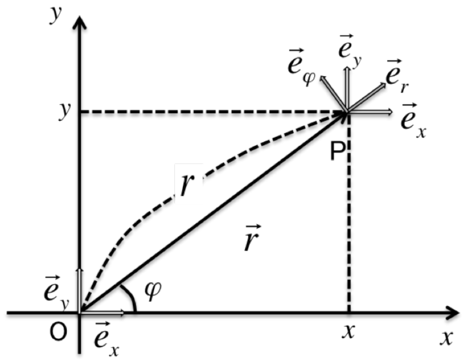

図 9.1 2次元極座標

直交座標 (x, y) と極座標 (r, φ) の間には

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (9.2)$$

の関係がある。動径方向の単位ベクトル $\vec{e}_r$、方位角方向の単位ベクトル $\vec{e}_\varphi$ は次のように表される。

$$\underline{\vec{e}_r = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y} \qquad (9.3)$$

$$\underline{\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y} \qquad (9.4)$$

直交座標の単位ベクトルは点 P の位置に関係なく常に一定であるが、極座標での単位ベクトルはどちらも方位角の関数であり点 P の位置で向きが変わる。

➢ 3次元極座標

次に、3次元極座標における点 P の位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ の記述について考える。図 9.2 に示すように3次元の極座標では動径 r、z 軸と位置ベクトルがなす角、天頂角 θ

と　の平面への射影がなす角（偏角という）φを使って表すことが出来る。

直交座標(x, y, z)との関係は

$x = r\sin\theta\cos\varphi$,　　(9.5a)

$y = r\sin\theta\sin\varphi$,　　(9.5b)

$z = r\cos\theta$　　(9.5c)

となる。2 次元座標の場合と同様に、単位ベクトルは点 P の位置によって変わってくる。

（3 次元系での単位ベクトルはどうなるだろうか？）

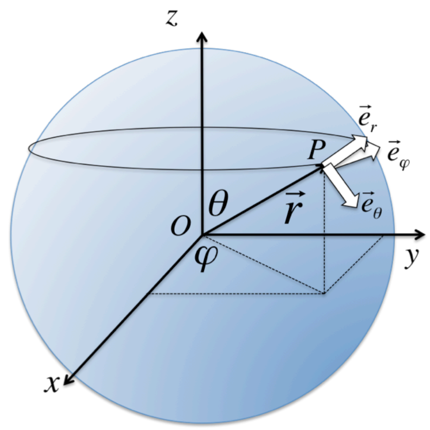

図 9.2　　3 次元極座標

■ 極座標による運動の記述

➢　2 次元極座標系での運動の記述

平面運動に対して、ベクトル物理量（位置、速度、加速度など）が極座標でどのように表してみる。

直交座標成分が$\vec{A} = (A_x, A_y)$　と表されるベクトル量があり、これが位置ベクトル$\vec{r}$に関連づけられているとする。(位置ベクトルの関数であるということ)

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) \qquad (9.6)$$

この時$\vec{A}$を極座標成分で表すと、

$$\underline{\vec{A}(\vec{r}) = A_r(\vec{r})\vec{e}_r(\vec{r}) + A_\varphi(\vec{r})\vec{e}_\varphi(\vec{r})} \qquad (9.7)$$

となる。　ベクトル$\vec{A}$が位置ベクトルの関数であるときにしか意味がないのは　極座標の単位ベクトルが位置ベクトルによって変わるからである。

以下では、考えているベクトル量が位置ベクトルの関数であること自明であるとして$\vec{r}$は明示しないこととする。

すると、直交座標での成分と極座標での成分の間の関係は

$$\underline{A_r = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi},\ \underline{A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi} \qquad (9.8)$$

となる。

それでは、質点の運動に関するベクトル量を極座標で表してみよう。

（1）　位置座標 $\vec{r}$

速度の動径成分、方位角成分を式(9.8)から導いてみる。

$$r_x = x = r\cos\varphi \,,\; r_y = y = r\sin\varphi \tag{9.9}$$

なので、

$$\underline{r_r = r_x\cos\varphi + r_y\sin\varphi = r} \tag{9.10a}$$

$$\underline{r_\varphi = -r_x\sin\varphi + r_y\cos\varphi = 0} \tag{9.10b}$$

となる

（2）　速度 $\vec{v}$

速度は直交座標系では

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt} \tag{9.11}$$

なので式(9.8)より

$$\underline{v_r = v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi = \frac{dx}{dt}\cos\varphi + \frac{dy}{dt}\sin\varphi} \tag{9.12a}$$

$$\underline{v_\varphi = -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi = -\frac{dx}{dt}\sin\varphi + \frac{dy}{dt}\cos\varphi} \tag{9.12b}$$

である。これを r,φ のみで表すために、$\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}$ を r,φ で表す。

$$\underline{v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\varphi) = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi} \tag{9.13a}$$

$$\underline{v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r\sin\varphi) = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi} \tag{9.13b}$$

となる。

これを式(9.12)に代入すると、

$$\underline{v_r = \frac{dr}{dt}},\quad \underline{v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}} \tag{9.14}$$

となる。v_r は質点が、動径方向 $\vec{e}_r$ に動く速さであり、v_φ は方位角 φ の変化率に腕の長さ（動径） r をかけた動径方向の回転成分を表している。

まとめると、

$$\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi \qquad (9.15)$$

となる。

(3)　加速度

加速度についても速度の場合と同様に

$$a_r=a_x\cos\varphi+a_y\sin\varphi=\frac{d^2x}{dt^2}\cos\varphi+\frac{d^2y}{dt^2}\sin\varphi \qquad (9.16a)$$

$$a_\varphi=-a_x\sin\varphi+a_y\cos\varphi=-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\varphi+\frac{d^2y}{dt^2}\cos\varphi \qquad (9.16b)$$

なので $\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}$ を r,φ で表せばよい。即ち、

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\cos\varphi-2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi-r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin\varphi-r(\frac{d\varphi}{dt})^2\cos\varphi \qquad (9.17a)$$

$$a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\sin\varphi+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\varphi-r(\frac{d\varphi}{dt})^2\sin\varphi \qquad (9.17b)$$

である。これを(9.16)に代入し、整理すると、

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r(\frac{d\varphi}{dt})^2 \qquad (9.18a)$$

$$a_\varphi=2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\varphi}{dt}) \qquad (9.18b)$$

となる。（速度の場合と違い、加速度を直感的にイメージにするのは難しい。）

✧　等速円運動

それでは、等速円運動について極座標を用いて考えてみよう。　この運動をする質点にどのような力を受けているのだろうか。

図 9.3 のように質量 m の質点が半径 r_0 の円周上を一定の速度 v_0 で運動しているとする。　この質点の運動を円の中心を原点とする 2 次元極座標で表す。

円運動なので動径 r の長さは r_0 で一定なので

$$\frac{dr}{dt}=0,\quad \frac{d^2r}{dt^2}=0 \qquad (9.19)$$

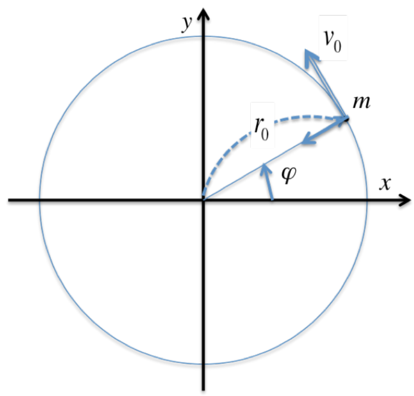

図 9.3

微小時間の間に質点が円周上を移動する距離は$v_0 \cdot \Delta t$なので、円弧の長さがこの距離になる。

この間の方位角φの変化$\Delta\varphi$は

$$\Delta\varphi \approx \frac{v_0 \Delta t}{r_0} \qquad (9.20)$$

と書ける。なので、その時間変化率は

$$\underline{\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v_0}{r_0}} \qquad (9.21)$$

である。このを角速度と言い、ωで表すこともある。

等速円運動の場合、角速度は一定なので

$$\underline{\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \omega_0}, \underline{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = 0} \qquad (9.22)$$

である。この$\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$は角加速度という。

このことをふまえて、等速円運動の速度の極座標成分を求めると、

$$\underline{v_r = \frac{dr}{dt} = 0}, \underline{v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r_0\omega_0 (= v_0)} \qquad (9.23)$$

となる。加速度は、(9.18)より、

$$\underline{a_r = -r_0\omega_0^2 = -\frac{v_0}{r_0}}, \underline{a_\varphi = 0} \qquad (9.24)$$

である。　(9.23)、(9.24)から、等速円運動の速度は方位角φ成分しかなく、加速度は動径r成分しかないことが解る。

この質点は運動方程式に従って運動しているので、この質点が受ける力は

$$\underline{\vec{F} = m\vec{a} = -mr_0\omega_0^2\vec{e}_r} \qquad (9.25)$$

であることが解る。この力は動径方向、原点（円の中心）に向かう力であり、この力のことを向心力という。　この力は常に$\vec{F} \perp \vec{v}$なので、向心力$\vec{F}$は質点に対して仕事をしない。即ちこの力は速度の向きを変えるだけで、速度の大きさ（速さ）は変わらない。

✧　単振り子

次に、運動方程式を共座標で扱ってみよう。振り子の運動について考える。

図 9.4 のように質量mの質点が重さを無視できる長さlの糸の先端に取り付けられて、天井からつり下げられている。このようなものを ***「単振り子」*** とよ

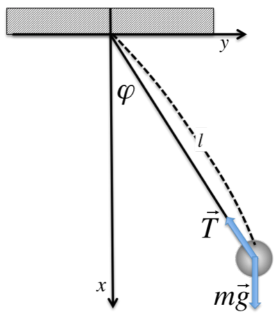

図 9.4

ぶ。糸が取り付けられている点を原点 O として、鉛直下向きを正にとる。　この質点に働く力は重力 $m\vec{g}$ と糸の張力 $\vec{T}$ である。この質点の運動方程式を動径成分、方位角成分に分けてかくと、

$$ma_r = m(\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\varphi}{dt})^2) = mg\cos\varphi - S \qquad (9.26a)$$

$$ma_\varphi = m(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}) = -mg\sin\varphi \qquad (9.26b)$$

となる。単振り子では糸の長さが一定なので

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0 \qquad (9.27)$$

を用いると、(9.26)は

$$-ml(\frac{d\varphi}{dt})^2 = mg\cos\varphi - S \qquad (9.28a)$$

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi \qquad (9.28b)$$

となる。この方程式は簡単に解けないので、ここでは振幅が小さい場合について考える。即ち $\varphi << 1$ の場合について近似を用いて解くことにする。

すると、(9.28b)は

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\varphi \qquad (9.29)$$

となり、これは単振動の微分方程式である。

この方程式の解（一般解）は次のように書ける。

$$\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (9.30)$$

ここで $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ である。

(9.30)の任意定数 A,B は初期条件から決まる。

例えば、$t = 0$ で質点を $\varphi = \varphi_0$ で静かに離した場合を考える。即ち初期条件は

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi(0)}{dt} = 0 \qquad (9.31)$$

となる。即ちこの場合の解は

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos\omega t, \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (9.32)$$

である。

➢ 3次元極座標での運動の記述−万有引力の位置エネルギー−

2次元の場合と同様にある点を中心として、その方向の向きを持つ力を中心力とよび、向心力、遠心力などがある。この力が中心からの距離$r=|\vec{r}|$のみに依存する場合の中心力は等方的という。 中心となる点を原点に選ぶと、等方的な力は極座標表示で

$$\vec{F}=F(r)\vec{e}_r \qquad (9.33)$$

と書ける。

万有引力は質量Mの質点と質量mの質点の間に働く力で、図9.5のように片方の質点の位置を原点にとり、考える。この2つの質点間の距離を$r=|\vec{r}|$とすると万有引力は次のように書ける。

$$\vec{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r=-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \qquad (9.34)$$

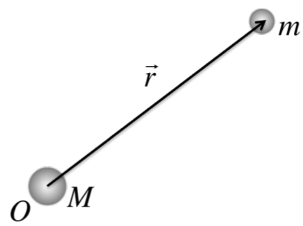

図9.5

即ち、万有引力は等方的な中心力であることが解る。

一般に等方的な中心力は保存力である。

それは、次のようにして証明できる。

質量mの質点が点Aから点Bへ移動する。この間に力（万有引力）がする仕事Wは

$$W_{A\to B}=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B F(r)\vec{e}_r\cdot d\vec{r}=\int_{r_A}^{r_B}F(r)dr \qquad (9.35)$$

となる。

このことから、この積分は点Aと点Bの原点からの距離のみに依存して､その途中の経路には無関係であることが解る。(図9.6)

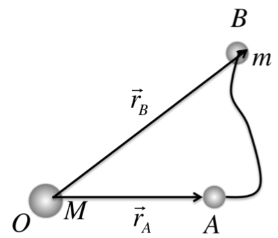

図9.6

この場合には位置エネルギーを定義することが出来、点$\vec{r}_0$を基準にとったとき、点$\vec{r}$の落ちエネルギー$U(r)$は

$$U(r)=-\int_{r_0}^{r}F(r)\vec{e}_r\,d\vec{r}=-\int_{r_0}^{r}F(r)\,dr \qquad (9.36)$$

で与えられる。万有引力の場合は

$$\begin{aligned}U(r)&=-\int_{r_0}^{r}F(r)dr=-\int_{r_0}^{r}(-G\frac{Mm}{r^2})dr=GMm\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r^2}dr\\&=\left[-GMm\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r}=-GMm(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0})\end{aligned} \qquad (9.37)$$

となる。　ここで基準点を無限遠$\left|\vec{r}_0\right| = \infty$にとると、万有引力による位置エネルギーは

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \qquad (9.38)$$

である。ここでは、片方の質点の位置を原点にとったが、全く別の位置に原点をとっても力の大きさや性質は変わらない。

■ 演習問題

質量mの物体が地球から受ける重力は$\vec{F}(r) = m\dfrac{MG}{r^2}\vec{e}_r$

で与えられる。　ここでrは地球の中心から物体までの距離である。地表（地球の半径$R = 6.37\times 10^6[m]$）では$\vec{F}(R) = mg$である。

静止衛星の軌道半径（地球の周りの円運動の半径）は地球の半径$\boldsymbol{R}$の何倍か？
（ヒント：静止衛星の周期は地球の自転と同じである。　このことから角速度ω$_0$が求められる。この角速度による向心力が静止衛星が地球から受ける重力を等しい。）

解答：
地球上では

$F(R) = m\dfrac{MG}{R^2} = mg$なので

$F(r) = mg\dfrac{R^2}{r^2}$となる。これが向心力である円運動の角速度は

$F(r) = mg\dfrac{R^2}{r^2} = mr\omega^2$　から　$\omega = \sqrt{g}\dfrac{R}{r^{3/2}}$である。従って、周期$T$は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r^{3/2}}{R\sqrt{g}} = 3.15\times 10^{-7}\times r^{3/2}\left[\sec\right]$$

となる。　静止衛星の周期は 1 日(24 時間)なので$T = 24[h] = 86400\left[\sec\right]$となり、

この 2 つの式から

$$r = 4.22\times 10^7\left[m\right] \approx 6.6R[m]$$

となる。