

平成 26 年度
物理学 I 講義資料
第 9 回

剛体の運動方程式(3)

生命医科学部医工学科

2014/6/12

目標：剛体の運動の例としてコマなどの回転体の運動の取り扱い方、考え方を学ぶ。

- 回転体の運動
- 対称コマの回転運動
- 演習問題

■ 回転体の運動

平面運動ではない剛体の運動の中で、比較的簡単に考察できる場合の例として、軸対称なコマの対称軸周りの回転運動について考える。この場合は並進運動を無視できるので、角運動量に対する運動方程式（回転運動の方程式）で運動を記述することが出来る。即ち、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i(t) \tag{9.1}$$

を用いて、このコマの運動を記述できる。 \vec{L} はコマの角運動量、 $\sum_i \vec{N}_i$ はコマに働くすべての力のモーメントである。

■ 対称コマの回転運動

質量 M 、(重心の周りの) 慣性モーメント I_G のコマが、そのコマの軸が地表に垂直な軸 (z 軸) に対して θ の角度を保ちながら角速度 ω で回転している。(図 9.1) このような、コマの軸の周りの回転を『自転』という。図 9.1 に示しているようにコマの軸の地表についているところから重心までの長さを h とすると、 z 軸周りのコマに働く重力による力のモーメントは

$$\vec{N} = \underline{\hspace{2cm}} \tag{9.2}$$

となる。この力のモーメントは大きさは $\hspace{1cm}$ で、その向きは紙面に $\hspace{1cm}$ の向きとなる。

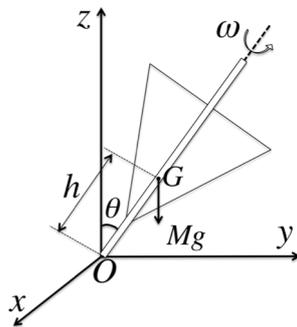


図 9.1 : 対称コマの回転運動

コマに働く力は、重力と軸が接している面から受ける力のみである。この力はコマの軸周りの回転には働かない。

このコマの z 軸周りの回転運動の方程式は全角運動量 \vec{L} を用いて

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (9.3)$$

となる。このことから、コマの軸は力のモーメントと同じ向きに回転している。この式を変形すると、つまり

$$d\vec{L} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (9.4)$$

であることが解る。ここで図 9.2 に示すように \vec{e}_ϕ は ϕ 方向の単位ベクトルであり、コマの軸の回転方向である。このようなコマの軸の運動を歳差運動という。

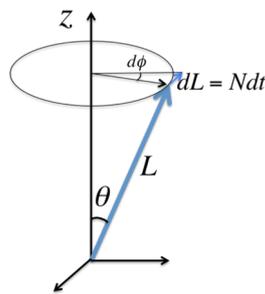


図 9.2 コマの角運動量

(9.2)式と(9.4)式から、

$$L \sin \theta d\phi = \underline{\hspace{2cm}} \quad (9.5)$$

が得られる。これから、コマの回転軸の z 軸周りの回転の角速度 Ω は

$$\Omega = \underline{\hspace{2cm}} \quad (9.6)$$

となる。(歳差運動の角速度)

ここで、コマの自転の角速度が歳差運動の角速度よりずっと大きい($\omega \gg \Omega$)とすると、全角運動量は $L = \omega I$ と書けるので、

$$\Omega = \underline{\hspace{2cm}} \quad (9.7)$$

と書くことが出来る。

この式から、自転の角速度が小さく、慣性モーメントが小さいと、歳差運動の角速度は大きくなり、又重心の位置が高くて歳差運動の角速度は大きくなることを解る。(コマの、歳差運動がおこりにくいコマにするには重心を低く、慣性モーメントが大きいコマを使うとよい。又、コマを速くまわすほど、歳差運動がおこりにくい。)

地球も自転しており、その軸は公転面の軸に対して 23.5° 傾いている。

なぜ、このように傾いて自転しているのだろうか？

地球の形は完全な球ではなく赤道の周りは大きくなっている楕円体になっている。

図 9.3 に示すように赤道面上の点 A と点 B での太陽からの重力の大きさを F_A 、 F_B とすると、

$$\underline{F_A > F_B} \quad (9.8)$$

である。

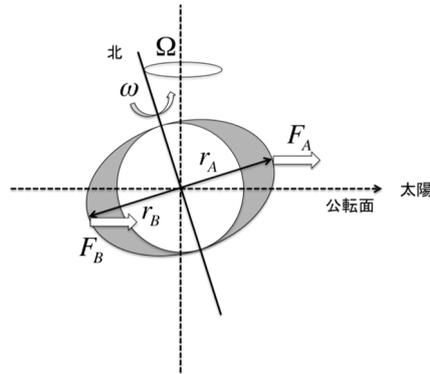


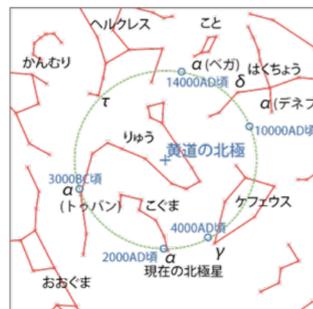
図 9.3 地球の自転と歳差運動

この 2 点に作用する力のモーメントの和は

$$\underline{\vec{N} =} \quad (9.9)$$

で、紙面に垂直で裏向きの方向に働いている。このため、地球全体に働く力のモーメントも、この方向となる。

このように地球全体は重心を通り公転の軸な軸の周りにゆっくりと歳差運動している。ちなみに、この地球の軸の歳差運動の周期は約 25800 年であることが解っている。(即ち、今は地球の自転軸は北極星の方向を向いているが、ゆっくりとずれていっていることになる。25800 年後は自転軸の方向には何があるのでしょうか？)



国立天文台のHPより
http://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/topics/html/topics2009_1.html

図 9.4 地球の自転軸の向きにある星座

演習問題：

ヨーヨーの運動

2つの半径の違う円板が張り合わせてあり、それぞれの半径を a 、 b ($a < b$) とする。半径小さい方の円板に糸がついている。この2枚の円板を張り合わせたものの、質量を M 、重心周りの慣性モーメントを I とし、この円板を2つ貼付けたヨーヨーの運動方程式を解きなさい。初期条件として $t=0$ で $\varphi=0$ 、 $z=z_0$ 、 $\frac{dz}{dt}=0$ とする。また、ヨーヨーが落下していく運動において、力学的エネルギーの保存則が成り立っていることを示しなさい。

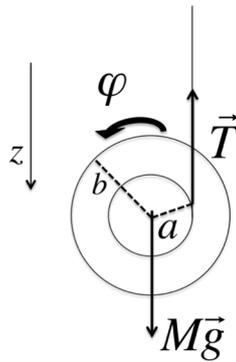


図 9.5