平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第 10 回

角運動量

−角運動量の保存則−

生命医科学部医工学科

2014/6/19

エネルギー、運動量と同様に物体の運動で重要な物理量である角運動量とは何かを理解し、角運動量の保存則を学ぶ。まず、角運動量の概念を学ぶのに必要なベクトル量の外積（ベクトル積）について理解する。

- ■　ベクトルの外積（ベクトル積）
- ■　角運動量とはなにか？
- ■　面積速度
- ■　演習問題

■ 前回の復習：運動量について

■ ベクトルの外積（ベクトル積）

ベクトル$\vec{A}$、$\vec{B}$があるとき、以下のように定義されるベクトル$\vec{C}$を、ベクトル$\vec{A}$と$\vec{B}$の外積（ベクトル積）という。

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \sin\theta \vec{e}_{\perp} \qquad \text{（定義）} \qquad (10.1)$$

ここで、$\vec{e}_{\perp}$は$\vec{A}$と$\vec{B}$の両方に垂直で$\vec{A}$から$\vec{B}$の向きに右ねじを回転させたときにねじが進む向きに向いた単位ベクトルである。

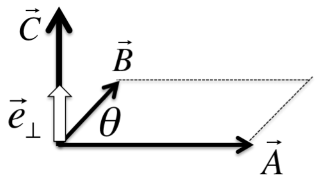

図 10.1 ベクトル積

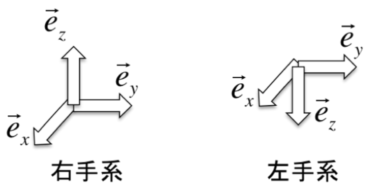

図 10.2

（補足）ベクトル$\vec{A}$、$\vec{B}$の内積はどのように表されるだろうか？

この定義から解るようにベクトル内積は 2 つのベクトルの間で同じ方向に向いている成分の大きさ（の積）を求めている。　従って、2 つのベクトルが直交している場合には同じ向きの成分が全くなく、内積はゼロとなる。　それでは外積はどのような意味があるのだろうか？　内積が同じ向きのベクトルについてその大きさを評価するであるのに対して、外積は異なる向きのベクトルについて、その向きの関係と大きさを評価するためのもととして定義される。　そのため 2 つのベクトルで作られる面をその評価量として定義し、向きとしてはこの面に垂直な単位ベクトル、大きさはこの面の面積とした。

さて、本題に戻ってベクトルの外積についてもう少しその性質について勉強する。

ベクトル$\vec{C}$の大きさは$\vec{A}$、$\vec{B}$が作る平行四辺形の面積と等しい。

以上の定義から、

$$\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B} \qquad (10.2)$$

である。

また、$\vec{A}//\vec{B}$ ならば、

$$\vec{A}\times\vec{B}=0 \qquad (10.3)$$

である。

＜右手系の定義＞

右手系の座標系においては、その単位ベクトル$\vec{e}_i$、$\vec{e}_j$、$\vec{e}_k$に対して、次の関係が成り立つ。

$$\vec{e}_i\times\vec{e}_j=\vec{e}_k、\vec{e}_j\times\vec{e}_k=\vec{e}_i、\vec{e}_k\times\vec{e}_i=\vec{e}_j \qquad (10.4)$$

左手系座標はその単位ベクトルが

$$\vec{e}_i\times\vec{e}_j=-\vec{e}_k、\vec{e}_j\times\vec{e}_k=-\vec{e}_i、\vec{e}_k\times\vec{e}_i=-\vec{e}_j \qquad (10.5)$$

となるように座標軸をとった座標系である。

（参考）ほとんどの場合は、右手系の座標が標準である。

左手系は測量や地理学、航海術などの分野で使われている。（北向きを x 軸、東方向を y 軸、高度方向を z 軸にとる。）

デカルト（直交）座標系ではベクトル積の定義は次のように表される。

ベクトル$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$、$\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$のベクトル積は

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_y & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{e}_z \qquad (10.6)$$

となる。

ベクトル積に関するいくつかの計算ルール。

1）３個のベクトルの間のベクトル積について、

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \qquad (10.7)$$

2）又、微分については

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad (10.8)$$

が、成り立つ。

■ 角運動量とは？

等速直線運動では運動エネルギーと運動量が時間によらず一定であった。　それでは等速円運動ではどうだろうか。運動エネルギーは一定であるが、運動量の大きさは一定であるがその向きは時間とともに変わっている。　等速円運動で時間によらず一定のベク

トル量がある。それが、円運動の中心の周りの角運動量である。

角運動量の定義： 角運動量は*ある点の周り*の量として定義され、回転運動の程度（勢い）を表す。（運動量は運動の程度（勢い）を表す。）速度$\vec{v}$で点$\vec{r}$を通過している質点の、点$\vec{r}_0$の周りの角運動量$\vec{L}$は

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times m\vec{v} = m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (10.9)$$

である。
原点周りの角運動量の場合には(10.9)式は以下のように書くことが出来る。

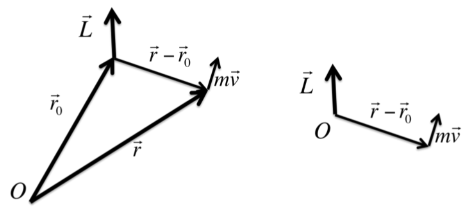

図 10.3 角運動量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (10.10)$$

(10.10)式より、原点周りの角運動量をデカルト（直交）座標系の成分で表すと、

$$\begin{cases} L_x = yp_z - zp_y = m(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}) \\ L_y = zp_x - xp_z = m(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}) \\ L_z = xp_x - yp_x = m(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}) \end{cases} \qquad (10.11)$$

となる。角運動量$\vec{L}$の次元と単位（MKS）は

$$[L] = LMLT^{-1} = ML^2T^{-1} = kg \cdot m^2/s \qquad (10.12)$$

である。
質点の運動はニュートンの運動方程式に従っているので、角運動量に対しても満たすべき運動方程式を導くことが出来る。
(10.10)で表される角運動量$\vec{L}$を時間微分すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (10.13)$$

ニュートンの運動方程式から(10. 13)式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}\times\vec{F} \qquad (10.14)$$

となる。

右辺の$\vec{r}\times\vec{F}$のことを力のモーメントまたはトルクと呼ばれるベクトル量$\vec{N}$で物体を回転させようとする力の効果を表す。(力のモーメントの定義)

$$\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F} \qquad (10.15)$$

従って、(10. 14)式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N} \qquad (10.16)$$

と書くことが出来る。これを角運動量の運動方程式という。

$\vec{N}=0$のときは$\frac{d\vec{L}}{dt}=0$なので$\vec{L}=const.$となり、角運動量は保存する。

■ 中心力と面積速度一定の法則

質量mの質点に中心力$\vec{F}$が働いているとする。　この力の中心を原点にとるとこの力は極座標で表すと

$$\vec{F}=F(r)\vec{e}_r \qquad (10.17)$$

と書くことが出来る。このとき原点周りの力のモーメントは

$$\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}=r\vec{e}_r\times F(r)\vec{e}_r=0 \qquad (10.18)$$

である。

従って。原点の周りのこの質点の角運動量$\vec{L}$は(10. 16)式より、

$$\vec{L}=const. \qquad (10.19)$$

となる。

角運動量$\vec{L}$はその定義から$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$なので、$\vec{r}$も$\vec{v}$も$\vec{L}$に垂直である。$\vec{L}$が一定なので$\vec{L}$に垂直な面も変わらないことになる。　即ち$\vec{r}$も$\vec{v}$も$\vec{L}$に垂直な面の上にあり、質点の運動はこの面内（2 次元面）の運動である。即ち、この質点の位置はこの 2 次元平面の座標で表すことが出来る。　今、中心力の中心を原点とした$\vec{L}$に垂直な面の座標を 2 次元極座標で表し、$\vec{L}$の方向を z 軸にとると

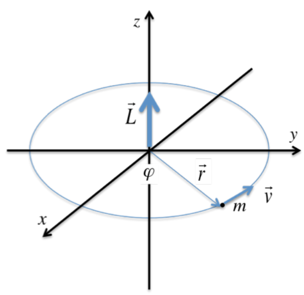

図 10.4 中心力

$$\vec{L}=mr\vec{e}_r\times(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi)=mr^2\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z \qquad (10.20)$$

となる。(このような座標を円筒座標という)
ここで、微小時間 Δt の間に質点の位置ベクトル $\vec{r}$ が変わっている間にこのベクトルが覆う三角形(図)の面積を ΔS とすると、これは近似的に

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r v_{\varphi} \Delta t \qquad (10.21)$$

と書くことが出来る。 よって単位時間あたりこの位置ベクトルが覆う面積(面積の時間変化率)は

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v_{\varphi} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \qquad (10.22)$$

となる。
この値を面積速度という。 面積速度と角運動量の大きさの間には次のような関係がある。

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad (10.23)$$

質点が中心力を受けている場合は $\vec{L} = const.$ だったので面積速度も

$$\frac{dS}{dt} = const. \qquad (10.24)$$

となる。 即ち、「中心力を受けて運動している質点の面積速度は一定である。」ということがわかる。

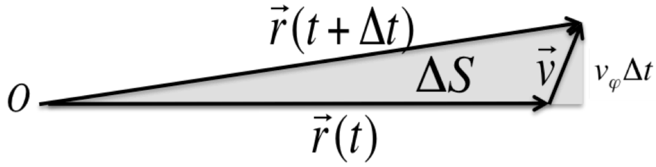

図 10.5 面積速度

[演習問題]
平面内を質量 m の質点が等速運動をして x 軸方向に進んでいる。 即ちこの質点の座標はデカルト座標で $x = vt, y = o, z = b$ と表すことが出来る。 この質点の原点周りの角運動量を求めなさい。
[解答]
角運動量はなので、

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(x\vec{e}_x + b\vec{e}_z) \times v\vec{e}_x = mbv\vec{e}_z \times \vec{e}_x = mbv\vec{e}_y$$

である。