平成 26 年度

物理学Ⅰ　講義資料

第 10 回

解析力学（1）

−力学の概念の再定式化−

生命医科学部医工学科

2014/6/19

目標：これまでの質点や剛体の運動は 17 世紀にニュートンが定式化した力学の手法で取り扱ってきた。18 世紀になると、ニュートンの力学を座標系の取り方によらず一般的に成り立つように解析学を用いて再構築したものを解析力学という。　解析力学による運動の取り扱い方、考え方を学ぶ。

- 古典力学の発展−ニュートン力学から解析力学へ−
- ラグランジェ形式の理論
- ハミルトン形式の理論
- 演習問題

■　古典力学の発展

数学の発展とともに、ニュートンが構築した力学をより一般的な体系にしようと 18 世紀から 19 世紀にかけて何人かの人々が取り組んできた結果、解析力学という学問が構築されてきた。　まず、オイラー(Eular, 1707-1783)が、質点の概念を導入し、これまで学んできた質点系の力学や剛体の力学の構築を進めた。　また、変分法（後で学ぶ）や摂動論などを創建した。オイラーによる力学に解析的手法の導入以後、力学は（１）ニュートンの運動方程式を出来るだけ一般的で見やすい形に書き直して適用しやすくするとともに（２）力学の数学的体系を構築し、再定式化する試みが進められた。

このような試みの結果、「*解析力学*」という学問分野が誕生した。　解析力学の体系はその形式からラグランジェ(Lagramge, 1736-1813)によるものとハミルトン（Hamilton, 1805-1860）によるものの 2 つに分けることができる。

ラグランジェは微分積分学を力学に応用し、その一般化のために最小作用の原理に基づいて解析力学を構築した。ハミルトンは一般化座標と一般化運動量を変数として構築した解析力学の形式である。（参考：Wikipedia）

今回はこの 2 つの形式について、勉強しよう。

■　ラグランジェ形式の理論

話を出来るだけやさしくするために、例として質量 m の質点が次のように書けるポテンシャル $U(r)=U(\sqrt{x^2+y^2})$ から導かれる中心力を受けて $x-y$ 平面上で運動する場合について考える。いくつかの変数による微分や、微分されたものを新たな変数として扱うが現ので、混乱しないよう各自どの変数による微分であるのか、認識しながら理解を進めること。

この質点に働く力 $\vec{F}$ は

$$\vec{F}=-\nabla U \qquad (10.1)$$

なので、質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\nabla U \qquad (10.2)$$

と書ける。

これを、直交座標系（デカルト座標系）で成分に分けて表すと、

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{\partial}{\partial x}U \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{\partial}{\partial y}U \end{cases} \qquad (10.3)$$

となる。　同じように、この方程式を極座標系で成分に分けて表すと

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2} - r(\dfrac{d\varphi}{dt})^2\right) = -\dfrac{\partial}{\partial r}U \\ m\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dfrac{d\varphi}{dt})\right) = -\dfrac{\partial}{\partial\varphi}U = 0 \end{cases} \qquad (10.4)$$

となる。　この2組を比べると、座標系によって方程式の形が大きく変わってしまうことがわかる。

運動方程式をどんな座標系についても同じ形で書くことはできるだろうか？
運動方程式を座標系によらない形で表すこと目指して検討してみる。

まず、(10.3)式や(10.4)式の左辺に現れた質点の加速度を運動エネルギーTを使って表してみる。
運動エネルギーTはデカルト座標系、極座標系で表すと、

$$\underline{T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\left((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2\right) = \frac{1}{2}m\left((\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\varphi}{dt})^2\right)} \qquad (10.5)$$

となる。

デカルト座標の場合は速度$\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}$は次のように表すことが出来る。

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m\frac{dx}{dt}, \frac{\partial T}{\partial y'} = m\frac{dy}{dt} \qquad (10.6)$$

となる。ここで$x' = \dfrac{dx}{dt}, y' = \dfrac{dy}{dt}$である。この関係から(10.3)式は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x'}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x}U \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial y'}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial y}U \end{cases} \qquad (10.7)$$

となる。
それでは極座標の場合はどうなるだろうか？
　(10.6)式のx, yをr, φに置き換えてみよう。例えば、Tをr'で微分してみると

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = m\frac{dr}{dt} = mr' \qquad (10.8)$$

なので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) = m\frac{d^2r}{dt^2} = mr'' \qquad (10.9)$$

となる。これを見ると、すぐに(10.7)式のようにはならないことが解る。(10.4)式の最初の式の左辺の第 1 項は運動エネルギーを用いて表せるが、第 2 項が出てこない。

しかし、運動エネルギーの極座標表示をよく見てみると、第 2 項は

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr(\frac{d\varphi}{dt})^2 = mr\varphi'^2 \qquad (10.10)$$

であることに気がつく。この関係を用いると、

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial r'}) - \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \qquad (10.11)$$

となることがわかる。今、ポテンシャルUはrのみの関数であるので

$$\frac{\partial U}{\partial r'} = 0 \qquad (10.12)$$

であるので(10.11)式は

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial (T-U)}{\partial r'}) - \frac{\partial (T-U)}{\partial r} = 0 \qquad (10.13)$$

と書くことが出来る。ここで

$$L \equiv T - U \qquad (10.14)$$

とおくと、(10.13) 式は

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial r'}) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad (10.15)$$

となる。それでは、この形の式のrをxに置き換えてみよう。

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial x'}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (10.16)$$

Tはx'のみの関数、Uはx関数なので、(10.16)式は

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial x'}) - \frac{\partial (-U)}{\partial x} = 0 \qquad (10.17)$$

となり、(10.7)式と同じになる。つまり、(10.15)や(10.16)から、運動方程式は座標系が変わっても同じ形で書けることとなる。　それでは(10.15) 式でrをφに置き換えた場合についてもみてみよう。ポテンシャルUは$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial x'}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$のみの関数なので

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi'}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=\frac{d}{dt}(mr^2\varphi')=0 \qquad (10.18)$$

となる。(10.4)式と比較すると、時間微分の前の $\frac{1}{r}$ がないものの、微分方程式としては同等である。

従って、様々な座標系で使われる座標変数 x,y,r,φ 等を q にという変数で代表させると各座標変数に対して運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad (10.19)$$

と書かれる。(10.19)式の形に書かれた運動方程式をラグランジェの運動方程式といい、関数 L のことをラグラジアン(Lagrangian)という。

■　ハミルトン形式の理論

ラグランジェの運動方程式はデカルト座標系や極座標だけでなく他の座標系でも成り立つ運動方程式である。　なので、この形式の運動方程式以外に新しい形式の運動方程式は必要ないように思われる。　しかし、自由度の数が f の系の運動を表すのに必要な独立な変数の数が f 個である場合はこのことは正しい。しかし、もし変数の数が倍増するような場合には新しい形の書き換えが可能になってくる。

以下では、考えやすいように保存力の場における質点（質量 m ）の 1 次元の運動を例にとる。この場合のニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (10.20)$$

となり、座標 x についての 2 階の微分方程式である。（ここでは、変数の数が多くなったときの場合のことも考えて、偏微分記号を用いている。）　座標 x の時間 t による微分として速度 $v=\frac{dx}{dt}=x'$ という変数を導入すると、(10.20)は、

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (10.21)$$

となり、$v=x'$ についての 1 階の微分方程式になる。x についての 2 階微分方程式を x と v についての 1 階の微分方程式になったことになる。

$$\frac{dx}{dt}=v\equiv f(x,v) \qquad (10.22a)$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x}\equiv g(x,v) \qquad (10.22b)$$

ハミルトンは質点の運動を表すのに座標 x だけでなく運動量 p も独立な変数として扱うことで(10.22)のように運動方程式は

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{p}{m} \\
\dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial U}{\partial x}
\end{cases}
\qquad (10.23)
$$

このような考え方の場合には質点の運動の状態は xp 空間（これを位相空間という）内の点で表される。（1 次元の運動を 2 次元の位相空間の点として表す。）

例えば、ポテンシャル

$$
U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \qquad (10.24)
$$

のもとで単振動を行っている質点の運動は、位相空間では楕円上の周回運動として表すことが出来る。

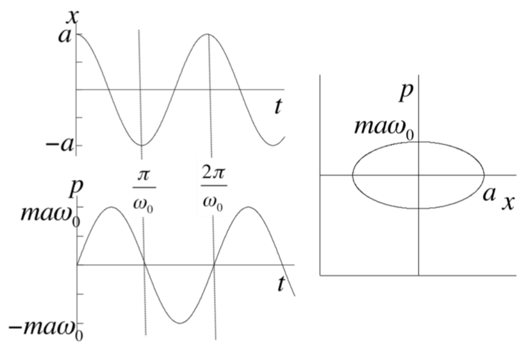

図 10.1　位相空間

この場合の連立方程式(10.23)はこのままでは座標系の選び方によって変わる。

ここで

$$
H(x,p) = T + U(x) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \qquad (10.25)
$$

という関数を導入すると、連立方程式(10.23)を

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\
\dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}
\end{cases}
$$

とすると、普遍的なものとなる。　このような形の運動方程式をハミルトンの正準方程式といい、関数 $H(x,p)$ をハミルトニアン(Hamiltonian)という。

■　演習問題

振り子の運動のラグラジアンとラグランジェの運動方程式をもとめなさい。

振り子は質量mで長さlの質量を無視できる糸につながっている。　極座標系で考え、鉛直下向きと糸がなす角度をθとする。

［解答］　振り子の速度は$v = l\dfrac{d\theta}{dt} = l\theta'$なので、

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\theta'\right)^2,\ U = -mgl\cos\theta$$

より、ラグラジアンは

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(l\theta'\right)^2 + mgl\cos\theta$$

となる。（ここで、位置エネルギーUの基準を糸がつながっている点にとった）
従って、運動方程式はθのみで

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$ 即ち $$ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl\sin\theta = 0$$

となる。