

平成 26 年度
物理学基礎 講義資料
第 11 回

いろいろな運動の取り扱い

－惑星の運動について－

生命医科学部医工学科

2014/6/26

17 世紀から 18 世紀にかけて、完成されてきた力学の大きな成果の一つが、天体の運動を予測出来るようになったことである。それまでは天体の運動は神が司っているという考え方であったが、力学によって予測できるようになったことで、神の意志によって天体が動いているのではなく、簡単な規則に従って運動していることが明らかになった。

- 万有引力による 2 つの物体間の運動
- 万有引力の下での運動方程式
- 極座標系での運動方程式
- 運動方程式の解
- 演習問題

■ 万有引力による 2 つの物体間の運動

極座標系での運動についての講義で出てきた万有引力は、質量をもつ物体と物体の間に働く引力である。万有引力はその大きさが 2 つの物体の質量の積に比例し、物体間の距離の 2 乗に反比例する。又その方向はお互いを結ぶ線上で引き合う方向である。万有引力を式で表すと、2 つの物体 A と B の質量をそれぞれ M, m であるとする。また、それぞれの位置ベクトルを $\vec{R}, \vec{r}$

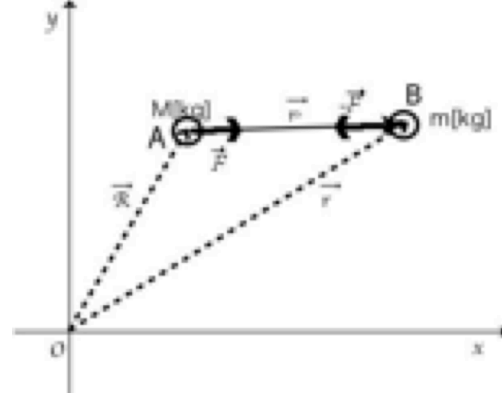


図 11.1

とする。(原点は任意にとることが出来る。いまは図のように原点をとる。)

すると、この物体の間に働く力(B が A から受ける力)は次のように表される。

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{|\vec{r}_{AB}|^2} \vec{e}_{r_{AB}} \quad (11.1)$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r} - \vec{R} \quad (11.2)$$

ここで G は万有引力定数

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} [N \cdot m^2 / kg^2] \quad (11.3)$$

であり、 $\vec{r}_{AB}$ 、 $\vec{e}_{r_{AB}}$ は 2 つの物体間を結ぶ方向のベクトルと単位ベクトルである。(図

11.1 を参照) 万有引力は、保存力であり、その位置エネルギー (ポテンシャル) は

$$U(\vec{r}) = -G \frac{M \cdot m}{r} \quad (11.4)$$

で与えられる。

位置エネルギー (ポテンシャル) とこれによる保存力は以下のような関係で表される。

$$\vec{F} = -\frac{d}{d\vec{r}} U(r) = -\text{grad} U(r) = -\nabla U(r) \quad (11.5)$$

: 数学ではこの操作のことを勾配 (グラディエント: gradient) という。

■ 万有引力のもとでの運動方程式

物体 A および、物体 B の運動方程式を求める。

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -G \frac{M \cdot m}{|r_{AB}|^2} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|} \quad : \text{A の運動方程式} \quad (11.6)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M \cdot m}{|r_{AB}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|} \quad : \text{B の運動方程式} \quad (11.7)$$

となる。ここで、A、B が受ける力は大きさが同じで、方向が逆なので A と B を一つの系としてみると ((6.6) と (6.7) を足すと)、系に内力のみで外力はかかっていない。したがって、系全体の運動量は保存する。

$$M \frac{d\vec{R}}{dt} + m \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{const.} \quad (11.8)$$

この式は位置と質量の積の形であるので、全体の質量 $M + m$ で割って、位置の次元に直

すと、 $\frac{M\vec{R} + m\vec{r}}{M + m} = \vec{r}_0$ はこの 2 つの物体の系の**重心**の位置を表す。重心 $\vec{r}_0$ を用いて式を変

形すると

$$(M + m) \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \text{const.} \quad (11.9)$$

となる。即ち、この系の重心は等速運動することがわかる。

この 2 つの運動方程式 (6.6) と (6.7) を変形して新しい変数 $\vec{r}_{AB} = \vec{r} - \vec{R}$ で表すと

$$Mm \frac{d^2 \vec{r}_{AB}}{dt^2} = -G(M + m)Mm \frac{\vec{r}_{AB}}{|r_{AB}|^3} \quad (11.10)$$

となる。

両辺を $M + m$ で割り、 $\mu = \frac{Mm}{M + m}$ とすると、(μ のことを**換算質量**という。)

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}_{AB}}{dt^2} = -GMm \frac{\vec{r}_{AB}}{|r_{AB}|^3} \quad (11.12)$$

となる。この式の意味は物体 A と B の運動は**全質量**による**重心の運動**と**換算質量 μ** の

相対運動に分けられるということである。 重心の運動は力が働いていないので簡単に解くことができる。(等速運動または静止)

次に換算質量による相対運動について考える。 例えば物体 A, B を太陽と地球とすると、 $M \gg m$ なので、

重心 $\frac{M\vec{R} + m\vec{r}}{M + m} \rightarrow \vec{R}$ となりほぼ太陽の位置、換算質量 $\mu \rightarrow m$ となり、ほぼ地球の質量

となる。 すなわち (11.12) 式は太陽の周りを回る地球の運動を表す運動方程式となる。

(太陽に対する地球の相対運動方程式) そこで、これより運動方程式(11.12)において $\vec{r}_{AB}$ を $\vec{r}$ 、 μ を m と書く。 (これは重心(太陽の位置)を原点にすると、質量 m の位置 $\vec{r}$ (地球の位置) の運動を考えていることになる。)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -GMm \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (11.13)$$

この運動方程式を直交座標系で書くと (x, y, z) の連立方程式となる。

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -GMm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -GMm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = -GMm \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \end{cases} \quad (11.14)$$

実際は3次元の運動であるが、万有引力による運動の場合、物体の軌道は平面上にあるので、簡単のため2次元で考える。

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -GMm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -GMm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \end{cases} \quad (11.15)$$

それでも運動方程式は (x, y) について複雑になる。 この様な中心力(距離と方向で表される力)の場合、直交座標のかわりに極座標を用いると便利である。

■ 極座標での運動方程式

極座標表示の運動方程式は、これまでの講義で出てきたので詳細は省くので、各自復習しておくこと、

(11.13) 式を 2 次元の極座標表示で書くと

$$\begin{cases} ma_r = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = F_r = -GMm\frac{1}{r^2} \\ ma_\theta = m\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = F_\theta = 0 \end{cases} \quad (11.15)$$

となる。

1 つ目の式は動径方向の運動方程式 $m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = F_r$ であるが、この式を変形して

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F_r + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

とする。右辺第 2 項は回転運動により生じる動径方向の力である。この第 2 項のことを **遠心力** という。

2 つ目の式 $m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$ はすぐに解けて

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \quad (11.16)$$

が得られる。これは角運動量が一定であることを示している。即ち中心力の下での運動では角運動量が保存される。

いま、

$$h = mr^2\frac{d\theta}{dt} \quad (11.17)$$

とおくと、ベクトル $\vec{r}$ が単位時間に覆う面積 ΔS 、つまり

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \frac{d\theta}{dt} \Delta t \rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2m} \quad (11.18)$$

となり、面積速度 $\frac{dS}{dt}$ が一定であるともいえる。

この性質はケプラーが惑星の運動を観察したときに観測結果として発見されている。

この面積速度が一定であるという法則は「ケプラーの第 2 法則」と呼ばれている。

■ 運動方程式の解

それでは、(11.15) 式の始めの式を解いてみよう。この式を再度書くと、

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = -GMm\frac{1}{r^2} \quad (11.19)$$

となる。

さて、この方程式を解いてみよう。

ここでは惑星の軌道（運動の軌跡）を求めることとする。即ち、 $r = r(\theta)$ の関数の形を求める。(11.17)式から

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{h}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \quad (11.20)$$

という関係が導かれる。(11.17)と(11.20)を用いて、(11.19)式を変形する。

$$\frac{h}{mr^2} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - r \left(\frac{h}{mr^2} \right)^2 \right) = -GM \frac{1}{r^2} \quad (11.21)$$

ここで変数 $u = \frac{1}{r}$ を用いて、(11.21)式を変数変換する。

すると、式は

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{h^2} \quad (11.22)$$

という形になる。

この方程式の解は

$$u(\theta) = A \cos \theta + \frac{GMm^2}{h^2} \quad (11.23)$$

である。 $r = \frac{1}{u}$ の関係から $r = r(\theta)$ を求めると

$$r(\theta) = \frac{l}{\varepsilon \cos \theta + 1}, \quad l = \frac{h^2}{GMm^2}, \quad \varepsilon = \frac{Ah^2}{GMm^2} \quad (11.24)$$

となる。

この系の全エネルギー E は運動エネルギー T と位置エネルギー $U(r)$ の和となるので

$$\begin{aligned} E = T + U(r) &= \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\theta^2) + U(r) = \frac{m}{2} \left(v_r^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) + U(r) \\ E &= \frac{m}{2} v_r^2 + \frac{h^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \end{aligned} \quad (11.25)$$

である。(11.24)であらわされる $r(\theta)$ と、

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{mr^2} \left(-r^2 \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{h}{m} A \sin \theta \quad (11.26)$$

を、(11.25)式に代入し、整理すると(11.24)式は

$$r(\theta) = \frac{l}{\varepsilon \cos \theta + 1}, \quad l = \frac{h^2}{GMm^2}, \quad \varepsilon = 1 + \frac{2Eh^2}{G^2 M^2 m^3} \quad (11.27)$$

となり、惑星の全エネルギー E を使って、軌道を表すことが出来る。

それでは、この軌道 $r(\theta)$ を ε の値によって場合分けしてみよう。

- $\varepsilon < 1$ の場合、つまり $E < 0$ の場合は、(11.27)式の分母は常に正で、すべての θ に対して r は有限の値をとる。この式で表される軌道は極座標での楕円の式である。

このことから「惑星は、太陽を焦点とした、楕円の軌道を描く」ことがわかる。(これはケプラーの第1法則と呼ばれる。) 楕円の長半径 a 、短半径 b はそれぞれ、

$$a = \frac{l}{1-\varepsilon^2}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{ と表される。 楕円の面積}$$

は πab である。

これを面積速度 $\frac{dS}{dt} = \frac{h}{2m}$ で割ると周期 T は

$$T = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{\frac{h}{2m}} = \frac{2\pi \cdot a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

となり、「周期の2乗が長半径の3乗に比例する」というケプラーの第3法則となる。

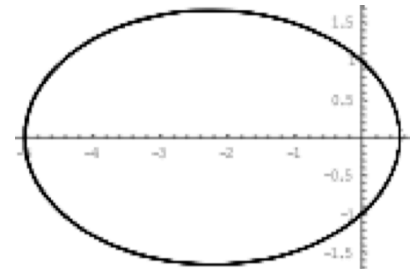


図 11.2

- $\varepsilon > 1$ の場合、つまり $E > 0$ の場合は、
 $\cos\theta < \frac{1}{\varepsilon}$ に対して r は解を持たず、原点を1つの焦点とする双曲線になる。これは一過性の彗星の軌道を表している。

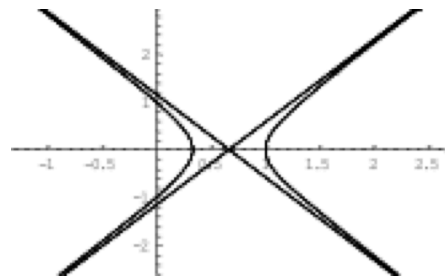


図 11.3

- $\varepsilon = 1$ の場合、つまり $E = 0$ の場合は、放物線の軌道となる。

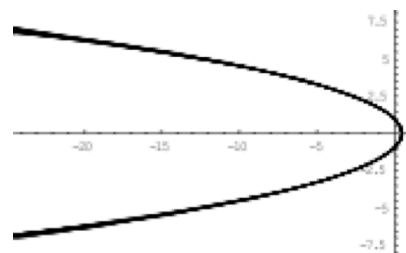


図 11.4

■ 演習問題

万有引力による運動

地面すれすれに円軌道を回る人工衛星となるためには 最低どれだけの初速度を与えなければならないか、求めなさい。(この初速度のことを**第一宇宙速度**と呼ぶ。)

また、地球の重力から脱出するために必要な初速度はどれだけか、求めなさい。(この速度は**第2宇宙速度**と呼ぶ。)

この計算の際、太陽の引力や大気との摩擦等は無視して良い。地球半径 $R \approx 6.38 \times 10^6 [m]$ 、重力加速度 $g \approx 9.78 [m/sec^2]$ とする。 また、式 (5.3) で与えられている万有引力定数

$G \approx 6.67 \times 10^{-11} [N \cdot m^2 / kg^2]$ を用いて。地球の質量も求めよ。

解答：

人工衛星の質量を m 、第一宇宙速度 v_1 、地球の半径 R 、その質量を M とすると、人工衛星は地球の表面すれすれに円運動をするので、この円運動の運動方程式は

$$m \frac{v_1^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}$$

となる。これを解くと、

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{gR} \approx 7.92 \times 10^3 [m/sec]$$

となる。

次に、地球の重力圏から脱出するためには、人工衛星の全エネルギーが無窮遠で最小でも速度がゼロにならなくてはならない。即ち、地球上での全エネルギーが無窮遠での全エネルギーに等しいときが、第二宇宙速度 v_2 が満たす条件である。即ち、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G \frac{Mm}{R} = 0 - G \frac{Mm}{\infty} = 0$$

となる。これを解くと、

$$v_1 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 1.12 \times 10^4 [m/sec]$$

となる。

重力加速度と万有引力の関係は $mg = G \frac{Mm}{R^2}$ なので、 $g = G \frac{M}{R^2}$ である。これを解くと、

地球の質量は $5.97 \times 10^{24} [kg]$ となる。