平成 26 年度

物理学Ⅰ　講義資料

第 11 回

解析力学（2）

–仮想仕事の原理とダランベールの原理–

生命医科学部医工学科

2014/6/26

目標：前回は解析力学の理論を大まかに学んだ。今回は力学における釣り合いに関する変分原理と仮想仕事の原理について学ぶ。

- ■ 仮想仕事の原理
- ■ ダランベールの原理
- ■ 演習問題

■　仮想仕事の原理

ニュートンの力学では、慣性系での質量mの質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F} \qquad (11.1)$$

と書くことが出来る。 この 2 階微分方程式（11.1）を解く（積分する）ことで、質点の各時刻での位置と、速度を求めることができる。

（1）1 個の質点の釣り合いの条件

最も簡単な例として、1 個の質点の釣り合いの条件について考える。この質点に働いているすべての力の合力を$\vec{F}(=\sum_i \vec{F}_i)$とするとき、釣り合いの状態では

$$\vec{F}= \qquad (11.2)$$

である。　質点をこの状態から任意の量

$$\delta\vec{r}=(\delta x,\delta y,\delta z) \qquad (11.3)$$

だけ変位させたとする。運動方程式(10.1)によれば、釣り合って静止した状態なので、この質点が勝手に動き出すことはないので、この変位は自然にはおこらないので***仮想変位***と呼ばれる。任意の仮想変位に対して力$\vec{F}$がする仕事のことを仮想仕事という。(10.2)式より仮想仕事は

$$\vec{F}\cdot\delta\vec{r}=0 \qquad (11.4)$$

となる。**逆に(11.4)式が成り立てばこの系は釣り合っているといえる**。この原理を「***仮想仕事の原理***」という。

この原理で説明することが出来る例を示す。

[円環上の質点]

図 11.1 のように鉛直面にある半径aの円環上に滑らかに束縛された質量mの質点の釣り合いについて考える。

円環の中心を原点にとり、xz平面上の角度φを図 11.1 のように定義するとである。質点に働いている力は重力$-mg\vec{e}_z$と円環から受ける垂直抗力$\vec{S}$である。束縛条件を満たす座標の変化は角度φが変わる変化だけなので仮想変位は

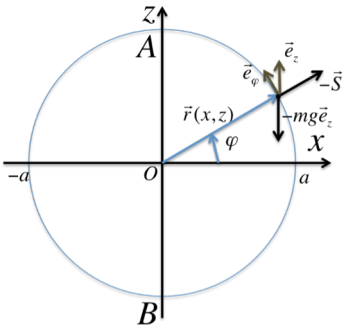

図 11.1

$$\delta\vec{r}=a\delta\varphi\vec{e}_\varphi \qquad (11.5)$$

と書ける。よって仮想仕事は

$$\vec{F}\cdot\delta\vec{r}=(\vec{S}-mg\vec{e}_z)\cdot a\delta\varphi\vec{e}_\varphi=-mga\cos\varphi\delta\varphi \qquad (11.6)$$

となる。（束縛条件の下では垂直抗力は仮想変位に対して垂直なので、この変位に対して仕事をしない。）仮想仕事の原理から釣り合いの位置は$\cos\varphi=0$を満たす角度φである。　この点は円環の最上点 A と最下点 B であることが解る。

このように、この例では釣り合いの位置として A と B があることが解ったが、この２てんには違いがある。

どのように違うだろうか？

今、質点にかかっている力は円環から受ける垂直抗力（束縛力）$\vec{S}$と保存力である重力$-mg\vec{e}_z$である。

重力はポテンシャル$U(\vec{r})$から

$$-mg\vec{e}_z=-\nabla U(\vec{r}) \qquad (11.7)$$

として導くことが出来る。

質点を釣り合いの位置から少し離れた A'や B'に持ってきて手を離すと、質点は動き始める。この運動はニュートンの運動方程式に従うのだから、微小時間Δtの間に動いた変位$\delta\vec{r}$は力

$$\bar{F}=\vec{S}-\nabla U(\vec{r}) \qquad (11.8)$$

と同じ向きである。従って、この力が質点にした仕事ΔWは

$$\Delta W=\vec{F}\cdot\delta\vec{r}>0 \qquad (11.9)$$

となる。垂直抗力は質点に仕事をしないので

$$\vec{S}\cdot\delta\vec{r}=0 \qquad (11.10)$$

となる。即ち

$$-\nabla U(\vec{r})\cdot\delta\vec{r}>0 \qquad (11.11)$$

である。この変位によるポテンシャルエネルギーの変化は

$$\Delta U(\vec{r})=U(\vec{r}+\delta\vec{r})-U(\vec{r}+\delta\vec{r})\approx\nabla U(\vec{r})\cdot\delta\vec{r} \qquad (11.12)$$

で与えられるので、式(11.11)は

$$\Delta U(\vec{r})<0 \qquad (11.13)$$

であることを意味する。即ち、釣り合いの位置以外の所におかれた質点は、常にポテンシャルエネルギーが減少する向きに動き始める。即ち、ポテンシャルエネルギーが極大の A 点付近の点 A'からは離れる向き、極小である点 B 付近の点 B‘からは点 B に戻る向きに動き始める。点 A は不安定な釣り合いの点、点 B は安定な釣り合いの点と呼ばれる。

[錘のついた棒の釣り合い]

図のように長さの質量が無視できる棒の両端の点A、Bにそれぞれ質量m_1、m_2の錘が取り付けられている。この棒の一点に上向きに力を加えて棒を水平に保つにはどうしたらいいだろうか。

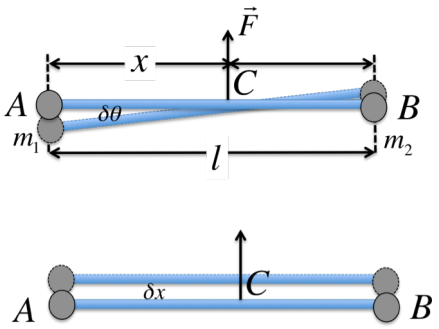

図 11.2

今点Aからの距離xにある点Cに大きさFの力を上向きに加えた結果、棒が水平に保たれているとする。　棒をこの状態から角度$\delta\theta$だけ傾けることによって各点に仮想変位を生じさせる。その結果Aは$x\cdot\delta\theta$だけ下方に変位し、点Bは$(l-x)\cdot\delta\theta$だけ上方に変位する。点Cの変位はゼロである。このときの仮想仕事は

$$m_1 g\cdot x\cdot\delta\theta + F\cdot 0 - m_2 g\cdot(l-x)\cdot\delta\theta \qquad (11.14)$$

なので、仮想仕事の原理より

$$m_1\cdot x - m_2\cdot(l-x) = 0 \qquad (11.15)$$

が満たされなければならない。　即ち、点Cの位置は点から

$$x = \frac{m_2}{m_1+m_2}l \qquad (11.16)$$

のところにあるという結果が得られる。

次に、棒を水平に保ったままδxだけ引き上げるという仮想変位を考えると仮想仕事の原理は

$$-m_1 g\cdot\delta x + F\cdot\delta x - m_2 g\cdot\delta x = 0 \qquad (11.17)$$

となり、引き上げる力の大きさFは

$$F = (m_1+m_2)g \qquad (11.18)$$

となる。

■　ダランベールの原理

仮想仕事の原理は静止している質点の釣り合いに関する一般的な原理である。ダランベール（d'Alembert, 1717-1783）は力を受けて運動している質点を記述する一般原理を求めた。簡単のため　1つの質点の場合について考える。この質点はニュートンの運動式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad (11.1)$$

に従って運動する。この式の両辺を左辺に集めると

$$\vec{F} - m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \qquad (11.19)$$

となるが、この式において $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ を質点に加わる力の１つと見なすと、釣り合いの式(11.2)と同じになるので、仮想仕事の原理の形式を応用することが出来る。
質点は式と初期条件によって求められる運動をしているので、任意の瞬間での質点の軌道からの任意の仮想変位を考える。すると、

$$\left(\vec{F} - m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\cdot\delta\vec{r} = 0 \qquad (11.20)$$

となる。　このことを「**ダランベールの原理**」という。

■　演習問題：鉛直面内にある半径 a の円環になめらかに固定された、質量 m の質点の運動のラグラジアンとラグラジアンから運動方程式を求めなさい。

解答：

この質点は円環に束縛されているので円運動をする。　円環の中心に対する、鉛直下向きとの角度を θ とすると、この質点の運動エネルギーは

$T = \dfrac{1}{2}m(a\dfrac{d\theta}{dt})^2$ である。位置エネルギーは円環の中心と同じ高さを基準にとると、

$U = -mga\cos\theta$ である。

したがって、ラグラジアンは

$L = T - U = \dfrac{1}{2}m(a\dfrac{d\theta}{dt})^2 + mga\cos\theta$ となる。

運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \theta'}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(ma^2\frac{d\theta}{dt}\right) + mga\sin\theta = 0$$

となる。