平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第 11 回

いろいろな運動の取り扱い

−惑星の運動について−

生命医科学部医工学科

2014/6/26

17 世紀から 18 世紀にかけて、完成されてきた力学の大きな成果の一つが、天体の運動を予測出来るようになったことである。それまでは天体の運動は神が司っているという考え方であったが、力学によって予測できるようになったことで、神の意志のよって天体が動いているのではなく、私たちにも働いている万有引力という中心力による運動であることが明らかになった。

- 万有引力による 2 つの物体間の運動
- 万有引力の下での運動方程式
- 極座標系での運動方程式
- 運動方程式の解
- 演習問題

■ 万有引力による2つの物体間の運動

極座標系での運動についての講義で出てきた万有引力は、質量をもつ物体と物体の間に働く引力である。万有引力はその大きさが2つの物体の質量の積に比例し、物体間の距離の 2 乗に反比例する力である。その方向はお互いを結ぶ線上で引き合う方向である。万有引力を式で表すと、2 つの物体AとBの質量をそれぞれ M , m であるとする。また、それぞれの位置ベクトルを $\vec{R}$, $\vec{r}$ とする。(原点は任意にとることが出来る。いまは図のように原点をとる。)

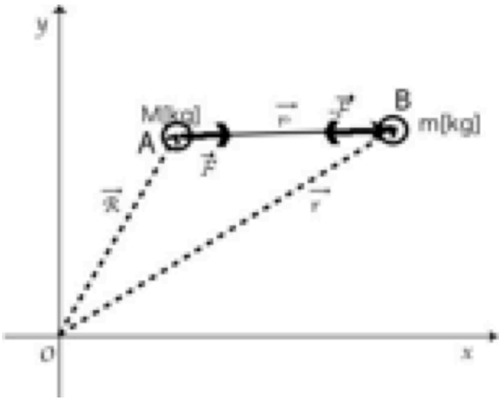

図　11.1

すると　すると、この物体の間に働く力(B が A から受ける力)は次のように表される。

$$\underline{\vec{F} =} \qquad (11.1)$$

$$\underline{\vec{r}_{AB} = \vec{r} - \vec{R}} \qquad (11.2)$$

ここで G は万有引力定数

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} [N \cdot m^2 / kg^2] \qquad (11.3)$$

であり、$\vec{r}_{AB}$、$\vec{e}_{r_{AB}}$ は2つの物体間を結ぶ方向のベクトルと単位ベクトルである。(図 11.1 を参照)　万有引力は、保存力であり、その位置エネルギー（ポテンシャル）は

$$\underline{U(\vec{r}) =} \qquad (11.4)$$

で与えられる。

位置エネルギー(ポテンシャル)と、これによる保存力は以下のような関係で表される。

$$\vec{F} = -\frac{d}{d\vec{r}}U(r) = -gradU(r) = -\nabla U(r) \qquad (11.5)$$

：数学ではこの操作のことを勾配(クラディエント：gradient)という。

■ 万有引力のもとでの運動方程式

物体 A および、物体 B の運動方程式を求める。

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -G\frac{M\cdot m}{|r_{AB}|^2}\frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|}$$ ：A の運動方程式 (11.6)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M\cdot m}{|r_{AB}|^2}\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|}$$ ：B の運動方程式 (11.7)

となる。　ここで、A、B が受ける力は大きさが同じで、方向が逆なので A と B を一つの系としてみると((6.6)と (6.7)を足すと)、系に内力のみで外力はかかっていない。　したがって、系全体の運動量は保存する。

$$M\frac{d\vec{R}}{dt} + m\frac{d\vec{r}}{dt} = const. \qquad (11.8)$$

この式は位置と質量の積の形であるので、全体の質量 $M+m$ で割って、位置の次元に直すと、$\dfrac{M\vec{R}+m\vec{r}}{M+m} = \vec{r}_0$ はこの 2 つの物体の系の**重心**の位置を表す。重心 $\vec{r}_0$ を用いて式を変形すると

$\underline{\cdot}$ (11.9)

となる。即ち、~~この系の重心は等速運動することがわかる。~~

この 2 つの運動方程式（6.6）と（6.7）を変形して新しい変数 $\vec{r}_{AB} = \vec{r} - \vec{R}$ で表すと

$$Mm\frac{d^2\vec{r}_{AB}}{dt^r} = \qquad (11.10)$$

となる。

両辺を $M+m$ で割り、$\mu = \dfrac{Mm}{M+m}$ とすると、（μ のことを**換算質量**という。）

$$\mu\frac{d^2\vec{r}_{AB}}{dt^r} = \qquad (11.11)$$

となる。　この式の意味は物体 A と B の運動は**全質量による重心の運動**と**換算質量** μ **の相対運動**に分けられるということである。　重心の運動は力が働いていないので簡単に解

くことができる。(等速運動または静止)
次に換算質量による相対運動について考える。 例えば物体A,Bを太陽と地球とすると、$M >> m$なので、

重心$\dfrac{M\vec{R}+m\vec{r}}{M+m} \to \vec{R}$となりほぼ太陽の位置、換算質量$\mu \to m$となり、ほぼ地球の質量となる。 すなわち(11.12)式は太陽の周りを回る地球の運動を表す運動方程式となる。(太陽に対する地球の相対運動方程式) そこで、これより運動方程式(11.12)において$\vec{r}_{AB}$を$\vec{r}$、μをmと書く。 (これは重心(太陽の位置)を原点にすると、質量mの位置$\vec{r}$(地球の位置)の運動を考えていることになる。)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^r} = \qquad (11.12)$$

この運動方程式を直交座標系で書くと(x,y,z)の連立方程式となる。

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -GMm\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -GMm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -GMm\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \end{cases} \qquad (11.13)$$

実際は3次元の運動であるが、万有引力による運動の場合、物体の軌道は平面上にあるので、簡単のため2次元で考える。

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -GMm\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -GMm\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \end{cases} \qquad (11.14)$$

それでも運動方程式は(x,y)について複雑になる。 この様な中心力(距離と方向で表される力)の場合、直交座標のかわりに極座標を用いると便利である。

■ 極座標での運動方程式

極座標表示の運動方程式は、これまでの講義で出てきたので詳細は省くので、各自復習しておくこと、

(11.13)式を 2 次元の極座標表示で書くと

$$\begin{cases} ma_r = m(\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2) = F_r = -GMm\frac{1}{r^2} \\ ma_\theta = m(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}) = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt}) = F_\theta = 0 \end{cases} \qquad (11.15)$$

となる。

１つ目の式は動径方向の運動方程式 $m(\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2) = F_r$ であるが、この式を変形して

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F_r + r(\frac{d\theta}{dt})^2$$

とする。右辺第 2 項は回転運動により生じる動径方向の力である。この第 2 項のことを**遠心力**という。

2 つ目の式 $m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt}) = 0$ はすぐに解けて

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = const. \qquad (11.16)$$

が得られる。これは角運動量が一定であることを示している。即ち中心力の下での運動では角運動量が保存される。

いま、

$$h = mr^2\frac{d\theta}{dt} \qquad (11.17)$$

とおくと、ベクトル $\vec{r}$ が単位時間に覆う面積 ΔS 、つまり

$$\Delta S = \frac{1}{2}\cdot r\cdot r\frac{d\theta}{dt}\Delta t \to \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2m} \qquad (11.18)$$

となり、面積速度 $\frac{dS}{dt}$ が一定であるともいえる。

この性質はケプラーが惑星の運動を観察したときに観測結果として発見されている。

この面積速度が一定であるという法則は［ケプラーの第 2 法則］と呼ばれている。

■ 運動方程式の解

それでは、(11.15)式の始めの式を解いてみよう。この式を再度書くと、

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)=-GMm\frac{1}{r^2} \qquad (11.19)$$

となる。

さて、この方程式を解いてみよう。

ここでは惑星の軌道（運動の軌跡）を求めることとする。即ち、$r=r(\theta)$ の関数の形を求める。(11.17)式から

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}=\frac{h}{mr^2}\frac{d}{d\theta} \qquad (11.20)$$

という関係が導かれる。(11.17)と(11.20)を用いて、(11.19)式を変形する。

$$\frac{h}{mr^2}\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)-r\left(\frac{h}{mr^2}\right)^2\right)=-GM\frac{1}{r^2} \qquad (11.21)$$

ここで変数 $u=\frac{1}{r}$ を用いて、(11.21)式を変数変換する。

すると、式は

(11.22)

という形になる。

この方程式の解は

$$u(\theta)= \qquad (11.23)$$

である。$r=\frac{1}{u}$ の関係から $r=r(\theta)$ を求めると

$$r(\theta)= \qquad (11.24)$$

となる。

この系の全エネルギー E は運動エネルギー T と位置エネルギー $U(r)$ の和となるので

$$E=T+U(r)=\frac{m}{2}(v_r^2+v_\theta^2)+U(r)=\frac{m}{2}\left(v_r^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)+U(r)$$
$$E=\frac{m}{2}v_r^2+\frac{h^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r} \qquad (11.25)$$

である。(11.24)であらわされる $r(\theta)$ と、

$$v_r=\frac{dr}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta}=\frac{h}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}=\frac{h}{mr^2}\left(-r^2\frac{du}{d\theta}\right)=-\frac{h}{m}A\sin\theta \qquad (11.26)$$

を、(11.25)式に代入し、整理すると(11.24)式は

$r(\theta)=$ ＿＿＿＿＿＿, $l=$ ＿＿＿＿＿＿, $\varepsilon=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ (11.27)

となり、惑星の全エネルギーEを使って、軌道を表すことが出来る。
それでは、この軌道$r(\theta)$をεの値によって場合分けしてみよう。

- $\varepsilon<1$の場合,つまり$E<0$の場合は、(11.27)式の分母は常に正で、すべてのθに対してrは有限の値をとる。この式で表される軌道は極座標での楕円の式である。

  このことから「**惑星は、太陽を焦点とした、楕円の軌道を描く**」ことがわかる。（これはケプラーの第１法則と呼ばれる。）楕円の長半径a、短半径bはそれぞれ、

  $a=\dfrac{l}{1-\varepsilon^2}$、$b=\dfrac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$と表される。　楕円の面積は$\pi ab$である。

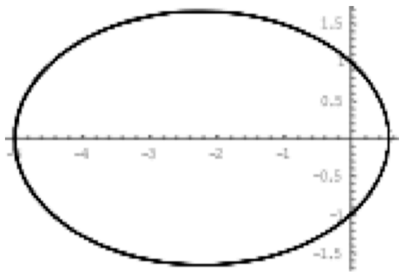

図 11.2

  これを面積速度$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{h}{2m}$で割ると周期$T$　は

$$T=\frac{\pi\cdot a\cdot b}{h/2m}=\frac{2\pi\cdot a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

  となり、「**周期の２乗が長半径の３乗に比例する**」というケプラーの第３法則となる。

- $\varepsilon>1$の場合、つまり$E>0$の場合は、$\cos\theta<\dfrac{1}{\varepsilon}$に対して$r$は解を持たず、原点を１つの焦点とする双曲線になる。これは一過性の彗星の軌道を表している。

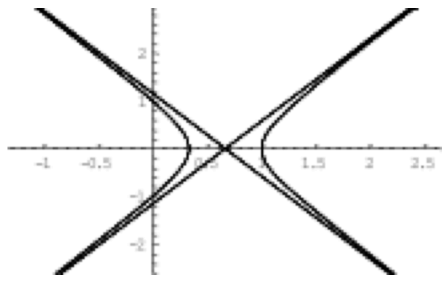

図 11.3

- $\varepsilon=1$の場合、つまり$E=0$の場合は、放物線の軌道となる。

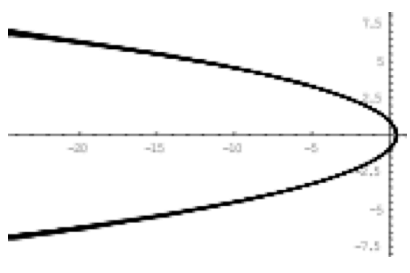

図 11.4

■ 演習問題

万有引力による運動

地面すれすれに円軌道を回る人工衛星となるためには　最低どれだけの初速度を与えなければならないか、求めなさい。（この初速度のことを**第一宇宙速度**と呼ぶ。）

また、地球の重力から脱出するために必要な初速度はどれだけか、求めなさい。　（この速度は**第２宇宙速度**と呼ぶ。）

この計算の際、太陽の引力や大気との摩擦等は無視して良い。地球半径 $R \approx 6.38 \times 10^6 [m]$ 、重力加速度 $g \approx 9.78 [m/\sec^2]$ とする。　また、式（5.3）で与えられている万有引力定数 $G \approx 6.67 \times 10^{-11} [N \cdot m^2/kg^2]$ を用いて。地球の質量も求めよ。