平成 26 年度

物理学Ⅰ　講義資料

第 12 回

解析力学（3）

−最小作用の原理−

生命医科学部医工学科

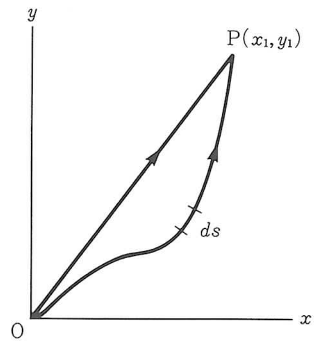
2014/7/3

目標：解析力学で重要な考え方である最小作用の原理を学ぶ。変分法によりオイラー･ラグランジェ方程式を導く。

- 変分法
- 最小作用の原理
- 演習問題

■ 変分法

後で述べる最小作用の原理とは、「自然界で起こる現象はその現象に関係するある積分が極小になるような経路でおこる。」という原理である。この原理を説明するのに用いられるのが変分法である。 まずこの方法がどのようなものか学ぶ。 例えば、点 O を出発して点 P に至る無数にある経路のうち、最も短い経路が実際にこの質点が通る経路であるということを表す。このことを数式で表すと，図 1 に示すように経路の微小素片 ds をとって，「積分



$$I = \int_0^P ds \qquad (12.1)$$

図 1

が最小となるような経路が質点の運動の経路である」ということになる。このような積分の値を求める方法のことを**変分法**といい、このような値を求める問題を**変分問題**という。ここで，点 O を出て，点 P に至る経路を

$$y = y(x) \qquad (12.2)$$

という関数によって指定することにする．このとき，微小素片 ds は dx，dy と図 2 のような関係があるので，

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad (12.3)$$

が成り立つ．したがって，ds は

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1+y'}\, dx \qquad (12.4)$$

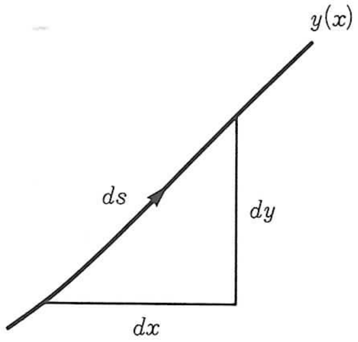


図 2

と書くことができる．式（4）を式（1）に代入すると，

$$I = \int_0^P \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (12.5)$$

となる．式（12.5）から，最短経路を求める問題を，「式（12.5）の積分 I を極小するような関数 $y(x)$を求めよ」ということもできる。即ち変分問題とは，関数 $y(x)$の形を求めるという問題である。普通の極値問題は，例えば関数 $F(x,\ y,\ z)$が極値をとるような x，y，z を求めるという問題である．それに対して，ここでは関数 $y(x)$の形を与えたときに，それに対応して積分 I の値が決まるという仕組みになっている．積分値 I は「**関数 $y(x)$の関数**」となっている．数学ではこのような I を**汎関数**とよんで，$I[y]$と表すこともある．特に，積分によって定義された汎関数を積分汎関数という．

変分原理の例として、光の屈折を取り扱う。

■　フェルマーの定理

最小作用原理を使って、光の屈折を説明したのがフェルマー(Fermat, 1601-1665)である。彼は、空気中から、水などの物質（光学の分野では媒質と呼ぶ）に入射した光が境界面で屈折して進んでいくことを、「光がある地点 A から別の地点 B に達するとき到達するのに必要な時間

$$t = \int_A^B dt \tag{12.6}$$

が極小になるような経路を通る」という変分原理を用いて説明した。

これを**フェルマーの定理**という。この場合極小になるべき［ある積分］は時間である。フェルマーの定理を説明するために図 3 のような場合を考える。

空気中の点 A から出た光の水中の点 B までの経路を求める。点 A、B を含む平面で考える。空気と水の境界を軸にとる。点 A の座標を (o,a)、点 B の座標と (b_1,b_2) とする。また、光が空気と水の境界を横切る点を P とし、その座標を $(x,0)$ とする。空気中の光の速さは c で、水中では光の速さは空気中での速さより屈折率 c 分の 1 だけ遅くなる。　このとき、光が点 A から点 B まで進むのにかかる時間は

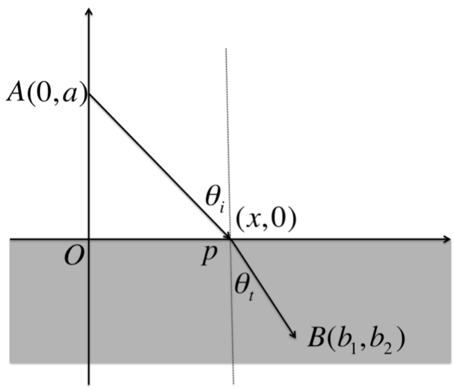


図 3

$$t = \int_A^B dt = \int_A^P dt + \int_P^B dt = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c} + \frac{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}{c/n} \tag{12.7}$$

である。　点 P の座標 x を変化させて時間が極小になる条件は

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(b_1-x)}{c/n\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}} = 0 \tag{12.8}$$

である。このことから、

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{n(b_1-x)}{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}} \tag{12.9}$$

が導くことが出来る。　図に示す、入射角 θ_i、出射角 θ_t を用いて表すと、次のようになる。

$$\sin\theta_i = n\cdot\sin\theta_t \tag{12.10}$$

この関係は光の屈折の関係を表すスネルの式である。

■ 最小作用の原理とオイラー･ラグランジェ方程式

ニュートンの運動方程式は最小作用の原理で求まることを示そう。

一旦、ニュートンの運動方程式を忘れよう。　N 個の独立な力学変数 $q_i(t)(i=1,2,3.....,N)$（この変数の数のことを自由度という）で表される系を考える。

ここで力学変数とは質点系の位置ベクトルなどの各時刻での系の状態を指定する量である。これは必ずしも座標ではないので、一般化座標とも呼ばれる。

一般化座標の例は、

1. ３次元空間における１質点の運動の場合は自由度は３である。　この質点の運動を表すための力学変数は直交座標では $q_1(t)=x(t), q_2(t)=y(t), q_3(t)=z(t)$ で表される。
2. ３次元空間の剛体の運動は６自由度である。　ここでの一般化座標は重心座標 $q_1(t)=x(t), q_2(t)=y(t), q_3(t)=z(t)$ と軸の角度 $q_1(t)=\phi(t), q_2(t)=\theta(t), q_3(t)=\psi(t)$ で表される。

前々回に出てきたラグラジアンを導入する。保存力のもとでのラグラジアンは

$$L = T - U(Potential) \qquad (12.11)$$

と与えられる。

簡単のため１質点の場合について考える。するとラグラジアンは

$$L(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t)) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2(t) - U(\vec{x}(t)) \qquad (12.12)$$

となる。

ラグラジアンを用いて最小作用の原理は次のように表される。

2 つの時刻 t_1, t_2 での系の力学変数 $q(t)$ の値が

$$q(t_1) = q_1, q(t_2) = q_2 \qquad (12.13)$$

で指定されている(境界条件)とき、この時刻の間での系の運動、すなわち力学変数 $q(t)$ は

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot L(q(t),\dot{q}(t),t) \qquad (12.14)$$

を最小（正確には極小、停留）するように決まる。　この積分のことを作用といい、この原理のことを「**最小作用の原理**」という。

このように、力学変数 $q(t)$ が最小作用の原理を満たすとする。　今、この力学変数が任意微小関数 $\delta q(t)$ だけずれた関数 $q(t)+\delta q(t)$ を考える。

この関数も、境界条件　を満たすので

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \qquad (12.15)$$

となる。この関数による作用積分 $S[q]$ が極小値をとる（停留する）ためには、作用積分

$$S[q+\delta q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot L(q(t)+\delta q(t), \dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t), t) \tag{12.16}$$

を微小関数 $\delta q(t)$ で展開したときに、の 1 次の項が存在しないということである。（即ち微小関数 $\delta q(t)$ での微分がゼロということ。）即ち

$$S[q+\delta q] = S[q] + 0\cdot\delta q(t) + C\cdot(\delta q(t))^2 + \cdots \tag{12.17}$$

ということである。

それでは、右辺にあるラグラジアンを $\delta q(t)$ で展開すると、

$$L(q(t)+\delta q(t), \dot{q}(t)+\delta\dot{q}(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \cdots \tag{12.18}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}
\delta S[q] &\equiv S[q+\delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt (L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - L(q,\dot{q},t)) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \cdots \right) \approx \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned} \tag{12.19}$$

が得られる。　最後の式の第 2 項は境界条件によりゼロとなる。

即ち、最小作用の原理より

$$\delta S[q] \equiv S[q+\delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q = 0 \tag{12.20}$$

が系の力学変数が満たすべき条件である。

この式が任意の $\delta q(t)$ で成り立つためには

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{12.21}$$

この微分方程式をオイラー･ラグランジェ方程式という.

(前々回のラグランジェの運動方程式である。)

■　演習問題

二重振り子：　おもり 1(質量m_1)とおもり 2（質量m_2）が図 4 のように天井から質量が無視できる棒（それぞれ長さl_1、l_2）でつながっている。即ち、この 2 つのおもりはそれぞれ天井につながっている点 O と、おもり 1 を支点としてたるまずに面内で回転運動しているとする。
この系の(オイラー･)ラグランジェの方程式を求めなさい。それぞれの運動の力学変数としては棒のふれ角θ_1、θ_2を用いなさい。

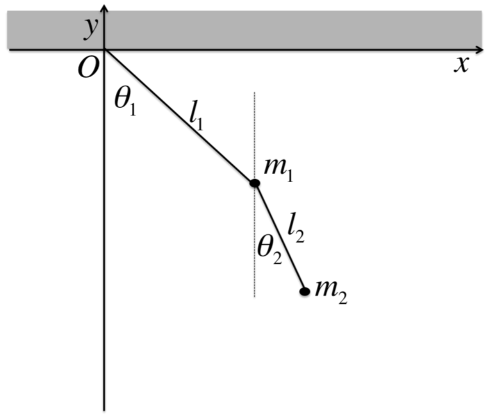


図 4

解答：

おもり 1 とおもり 2 の座標は

$$(x_1, y_1) = (l_1 \sin\theta_1, -l_1 \cos\theta_1)$$
$$(x_2, y_2) = (l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2, -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2)$$

となる。これを時間微分すると、

$$(\dot{x}_1, \dot{y}_1) = (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1, l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1)$$
$$(\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2, l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)$$

となる。　この 2 つのおもりからなる系の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーからこの系のラグラジアンをθ_1、θ_2を用いて表すと

$$L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1 g y_1 - m_2 g y_2$$
$$= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) + m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)$$

これから、運動方程式（オイラー･ラグランジェの方程式）を求めると

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(m_1 + m_2\right)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2\right] = -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \left(m_1 + m_2\right) g l_1 \sin\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[m_2 l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\right] = m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin\theta_2$$

となる。　　この運動方程式の一般解を求めるのは難しいが、角度θ_1、θ_2が小さいときには近似解を求めることが出来る。