平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第 12 回

座標系の相対運動（1）

−並進運動−

生命医科学部医工学科

2014/7/3

並進運動している座標系での質点の運動を考える場合、座標系が等速運動しているのか、加速度運動しているのかによって一定速度で動いている飛行機や電車に乗っているとき、私たちはその速度を感じない。これは、飛行機や電車の中で見られる現象が地上で体験するニュートンの運動方程式で記述される現象と同じであるからである。例えば、電車の中で物を落としても、地上と同じようにまっすぐに落ちる。しかし、飛行機や、電車が加速しているときは地上とは違ったことがおこる。この関係を、理論的に理解する。

- 座標系と、その相対運動
- 静止慣性系に対して等速直線運動をしている座標系
- 静止慣性系に対して直進加速度運動をしている座標系
- 運動方程式の解
- 演習問題

■　静止慣性系に対して等速運動をしている座標系

これまでは，観測者（座標）が静止しているとして，物体の運動を考えてきた．ここでは座標系が運動している場合の物体の運動を考える．図 1 のように 2 つのデカルト座標系（直交座標系）（$O-xyz$）と（$O'-x'y'z'$）を考える。前者の S 系、後者を S'系と呼ぶことにする。　質点の位置 P の S 系での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$、S'系での位置ベクトルを $\mathbf{r}'(t)$ としたとき、それぞれの座標系での位置ベクトルで表すと、

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad (12.1)$$

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'} \qquad (12.2)$$

となる。

また、静止している S 系から見た S'系の原点の位置ベクトルは

$$\vec{R}_{o-o'}(t) = x_{o'}\vec{e}_x + y_{o'}\vec{e}_y + z_{o'}\vec{e}_z \qquad (12.3)$$

と表すことが出来る。即ち、それぞれの系での点 P の位置ベクトルは、つぎのような関係がある。

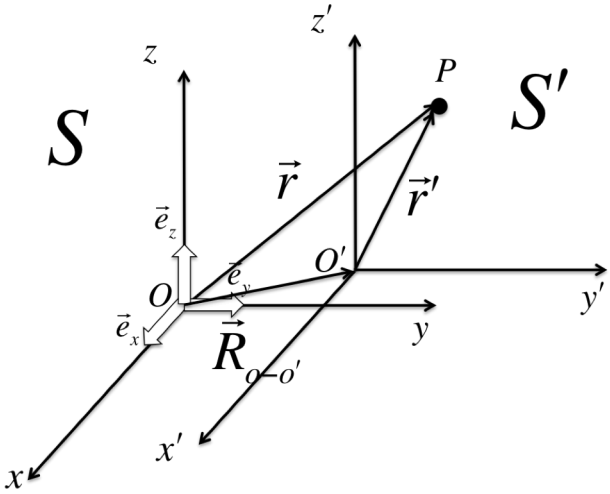


図 1

$$(12.4)$$

S 系に対する、S'系の運動は（1）原点の移動と、（2）座標軸の回転がある。

一般的にはこの 2 つの運動が考えられるが、ここでは（1）と（2）を別々に考える。

今回は、（1）原点の移動という、S 系に対して、S'系が並進運動している場合について考える。

物体の運動と，静止座標系から見て一定の速度 $\boldsymbol{v}_0$ で等速直線運動している座標系（S'系）から見た物体の運動がどのようになるか考えてみる．

質量 m の質点が時刻 t で静止座標系から見ると，速度 $\boldsymbol{v}(t)$ で $\boldsymbol{r}(t)$ の位置にいたとする．質点に加わる外力を $\boldsymbol{F}$ とすると，静止座標系から見た質点の運動方程式は,

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{\mathbf{F}} \qquad (12.5)$$

で与えられる．等速直線運動している座標系の場合を考えると，時刻 $t=0$ のときの静止座標と等速直線運動している座標の原点 $O-O'$ 間の距離を $\boldsymbol{R}_0$ とすると, 時刻 t の原点 $O-O'$ 間の位置ベクトルは,

$$\vec{R}_{o-o'}(t) = \qquad (12.6)$$

となる. 時刻 t において, 等速直線運動している座標系から見た質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ は,

$$\vec{\boldsymbol{r}}'(t) = \qquad (12.7)$$

となる．式(12.7)を時間で微分して速度を求めると,

$$v'(t) = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \qquad (12.8)$$

が得られる. 式(12.8)から, 等速直線運動している座標系から見た質点の速度は, 静止座標系に対して等速直線運動している分だけ引いた値になることが分かる.

さらに，式(12.8)を微分して等速直線運動をしている座標系から見た加速度を求めると,

$$\mathbf{a}'(t) = \frac{dv'(t)}{dt} = \qquad (12.9)$$

となる． $\boldsymbol{v}_0$ は一定であるので，微分すると消えて，等速直線運動している座標系から見た加速度は，静止座標系から見た加速度同じであることが示される．したがって，加速度が同じということは，質量が変化しない限り質点が従う運動方程式も同じということになり,

$$m\vec{a}(t) = m\vec{a}'(t) = \vec{F} \qquad (12.10)$$

となる．このように，座標系が異なってもニュートンの運動方程式が特別な仮定を加えることなしに成り立つ座標系を<u>慣性系</u>とよぶ。

それでは、この 2 つの慣性系で同じ質点の運動を観測したときに、運動量と運動エネルギーはどのように表されるだろうか。
次のような例を考える。

図のように一定の速度 V_0 で走っている電車の中で人がボールを初速度 v_0 で真上に投げ上げたときの運動を考える。このときボールは最上点まで達した後、又まっすぐ下向きに落ちてくる。この現象を静止系にいる人が見た場合どのように見えるだろうか。
電車の中でのボールの運動方程式は静止系でも同じ

$$m\vec{a}(t) = m\vec{a}'(t) = m\vec{g} \qquad (12.11)$$

電車の中の座標系での成分で書くと

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \frac{d^2y'}{dt^2} = 0, \frac{d^2z'}{dt^2} = -g \qquad (12.12)$$

となる。これを初期条件

$$\frac{dx'}{dt} = 0, \frac{dy'}{dt} = 0, \frac{dz'}{dt} = v_0 \qquad (12.13)$$

の下で、解くことになる。同じ現象を静止系（地上）にいる人から見ると、このボールは初期条件

$$\frac{dx}{dt} = V_0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = v_0 \qquad (12.14)$$

解くことになる。

このように、ボールの軌跡は電車の中の人、地上の人とで違って見える。

この 2 つの系での運動量と運動エネルギーについて考える。

それぞれの慣性系での運動量は

$$\vec{p} = m\vec{v}(t), \vec{p}' = m\vec{v}'(t) \qquad (12.15)$$

と書けるが、これらの間には

$$\underline{\vec{p} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (12.16)}$$

の関係がある。また運動エネルギーK は

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(t), K' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2(t) \qquad (12.17)$$

なので、

$$\underline{K = \frac{1}{2}m(\vec{v}'(t) + \vec{V}_0)^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2(t) + m\vec{v}'(t)\cdot\vec{V}_0 + \frac{1}{2}m\vec{V}_0^2(t) = \qquad (12.18)}$$

となる。このように、運動量や、運動エネルギーは座標系によって異なってくる。

それでは、運動量や運動エネルギーの変化はどうなるだろうか？

電車の中でのボールの速度変化は

$$\Delta v'(\Delta t) = \frac{\vec{F}}{m}\Delta t \qquad (12.19)$$

と書けるので、運動量と運動エネルギーの変化はそれぞれ

$$\Delta\vec{p}' = m\Delta\vec{v}' = \vec{F}\Delta t \qquad (12.20)$$

$$\Delta K' = \frac{1}{2}m\left(\Delta\vec{v}'\right)^2 + m\vec{v}'\cdot\Delta\vec{v}' = \frac{\vec{F}^2}{2m}\left(\Delta t\right)^2 + \vec{p}'\cdot\frac{\vec{F}}{m}\Delta t \_\_(12.21)$$

となる。地上から見ると、運動方程式が同じなので

$$\underline{\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = \vec{F}\Delta t \qquad (12.22)}$$

で、運動量の変化は同じであるが、運動エネルギーの変化については

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left\{\left(\vec{v} + \Delta\vec{v}\right)^2 - \vec{v}^2\right\} = \frac{1}{2}m\left\{\left(\vec{v}' + \vec{V}_0 + \Delta\vec{v}\right)^2 - (\vec{v}' + \vec{V}_0)^2\right\} \qquad (12.23)$$

$$\underline{= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

となって、$\vec{V}_0\cdot\vec{F}\Delta t$ だけ異なってくる。

これらのことから、慣性系同士では質点が受ける力積（運動量の変化）は同じであるが、仕事の大きさ（運動エネルギーの変化）は異なる。これは、仕事は、移動距離が座標系で

異なるためである。

■　加速度系（慣性力）

今度は，静止座標系に対して等加速度運動している場合を考える．図 2 のように加速度 $\boldsymbol{a_0}$ で右向きに走っている車があるとして，その先に電柱があったとする．車に乗っている人から見ると，その電柱は自分に対して加速度－$\boldsymbol{a_0}$ で迫ってくるように見える．運動の第 2 法則から，加速度があるということは，物体にどこからか力が加えられたということになるが，図 2 を見る限り、電柱には力は加わっていないのに、観測者からは加速度運動即ち力が働いているように見える。このように観測者が加速度運動している座標系にいるために生じる力を慣性力と呼ぶ. 静止している座標系から見た場合は, 慣性力はない. 図 3 に静止座標系と加速度運動している座標系の関係を示す.

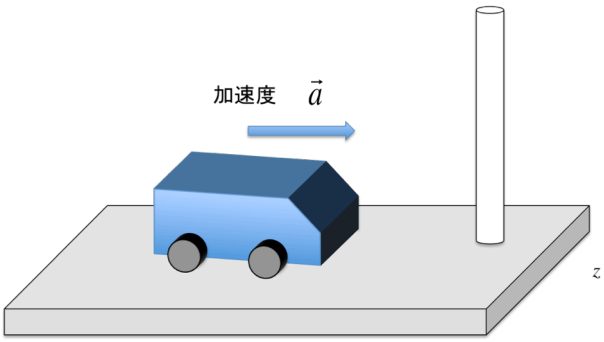


図 2

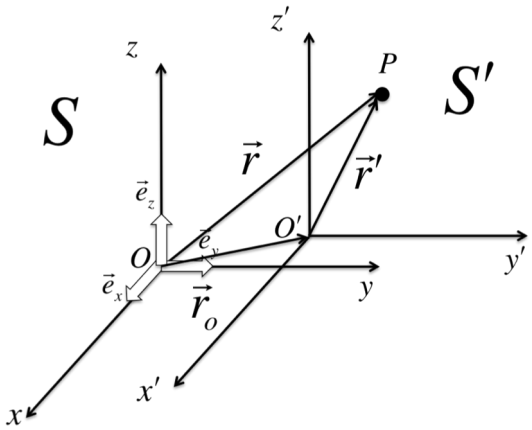


図 3

図 1 と座標系の変数としては同じであるが、加速度運動している系の原点の位置ベクトルは、静止座標系に対して加速度 $\boldsymbol{a_0}$ で運動しているため次のように表される。

$$\vec{\mathbf{R}}_{o-o'}(t) = \vec{\mathbf{R}}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 \qquad (12.11)$$

従って、この加速度系から見た質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ は

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = \vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{R}_{o-o'}(t) = \vec{\mathbf{r}}(t) - \vec{R}_0 - \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 \qquad (12.12)$$

となる．式(6)を時間で微分して速度を求めると，

$$\vec{v}'(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} - \vec{a}_0 t = \qquad (12.13)$$

となり，さらに時間で微分して加速度を求めると，

$$\vec{a}'(t) = \vec{a} - \vec{a}_0 \qquad (12.14)$$

となる．式(8)の両辺に質点の質量 m を掛けると，加速度運動をしている座標系から見た運動方程式

$$m\vec{a}'(t) = m\vec{a} - m\vec{a}_0 \qquad (12.15)$$

が得られる．式(9)から，右辺第 2 項が慣性力である．加速度運動している座標系から見た物体の運動は，静止座標系の運動方程式の右辺(物体に働いている力)に慣性力を加えた形になっている．

従って、静止座標系での運動方程式が

$$\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \vec{F} \qquad (12.16)$$

と表されるとき、加速度運動している座標系での運動方程式は

$$m\vec{a}'(t) = \qquad (12.17)$$

静止系で働いている力 $\vec{F}$ 以外に $-m\vec{a}_0$ という力が働いているような運動方程式となる。

この $-m\vec{a}_0$ のことを<u>慣性力（見かけの力）</u>という。

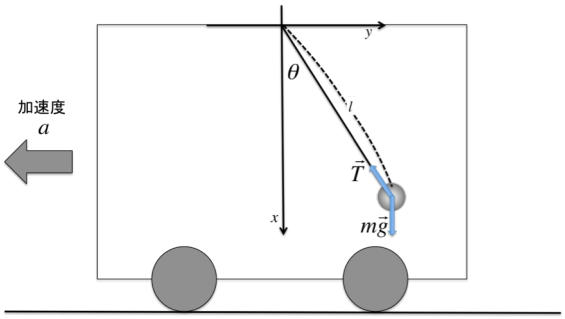
このような力のために $\vec{F} = 0$ でも、加速度系では

$$m\vec{a}'(t) = -m\vec{a}_0 \qquad (12.18)$$

となり、質点の運動は静止または等速直線運動とはならない。　このような静止座標系に対して加速度運動をしている座標系を**非慣性系**という。

[演習問題]

加速度 a で平面上を直線運動している電車があるとして，以下の問に答えなさい．重力加速度を g とする．



図

(1) 車内に天井から質量 m の質点を質量が無視できる軽い糸でつるしたとき，車内で見ると糸が角度 θ で静止した．$\tan\theta$ を a と g を用いて表しなさい．

(2) 糸の張力の大きさを m，a，g を用いて表しなさい．