平成 26 年度

物理学Ⅰ　講義資料

第 13 回

解析力学（3）

−一般化座標と一般化力−

生命医科学部医工学科

2014/7/10

目標：ここ数回でニュートンの運動方程式と同等のラグラジアンから運動方程式が導かれることをみてきた。ラグランジェの運動方程式はどのような座標系でも同じ形に書けるという特徴がある。　このため複雑な系の運動の方程式を表すのに大変便利である。今回はこのことを示すために、1）2 個以上の質点を同時に扱い、2）座標系などに関係しない一般化座標へラグランジェ方程式を拡張する。

■　質点系に対する仮想仕事の原理とダランベールの原理

■　一般化座標

■　演習問題

■ 質点系に対する仮想仕事の原理とダランベールの原理

N 個の質点系に対する釣り合いの条件は、すべての質点について

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{S}_i = 0, (i = 1, 2, \cdots N) \tag{13.1}$$

が成り立つことである。

ここで$\vec{S}_i$はi番目の質点の束縛条件による力、$\vec{F}_i^a$は束縛条件によらない力（内力を含む）である。　各質点に微小の仮想変位

$$\delta\vec{r}_i (i = 1, 2, \cdots N) \tag{13.2}$$

を与えると、これによって質点系になされる仮想仕事は

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i (\vec{F}_i^a + \vec{S}_i) \cdot \delta\vec{r} = 0 \tag{13.3}$$

を満たす。　今仮想変位として、束縛条件を満たす物のみしか考えないとすると束縛力による仕事は

$$\vec{S}_i \perp \delta\vec{r} \Rightarrow \vec{S}_i \cdot \delta\vec{r} = 0 \tag{13.4}$$

となるので、仮想仕事としては束縛力以外の力によるもののみ考えればいい。即ち、

$$\sum_i \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{13.5}$$

これが多質点系の仮想仕事の原理である。

N 個の質点からなる系の運動については、各質点に対して運動方程式が成り立つ。

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{13.6}$$

運動をしている質点系に対してもダランベールの原理が成り立ち、各質点の任意の変位$\delta\vec{r}_i$に対して

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{13.7}$$

となる。<u>束縛力がある場合は束縛力は仕事をしない</u>ので、

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^a - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{13.8}$$

である。

■ 一般化座標

質点の位置を表すのにデカルト座標(x,y,z)系以外に極座標(r,θ,φ)、円筒座標(ξ,φ,z)を用いることが出来る。デカルト座標ではすべての成分が長さの次元を持っているのに対し、θ,φなどは無次元量であることに注意する必要がある。質点の位置を表すのに用いられる変数の組は座標系によって異なり、次元も違うが、これらを総称して<u>一般化座標(q_1,q_2,q_3)</u>と呼ぶ。

簡単のため、1 質点の場合を例にとりデカルト座標と一般化座標として極座標について考える。両者の座標変数の間には

$$x = x(q_1,q_2,q_3:t), y = y(q_1,q_2,q_3:t), z = z(q_1,q_2,q_3:t)$$

の関係がある。 座標は時間に依存して変化していくので、それもあらわに表した。すると速度の成分は

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \\ &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial x}{\partial t}\end{aligned} \tag{13.9}$$

と書ける。他の成分についても同様に書くことが出来る。

例えば、2 次元の極座標についてこれを適用すると、

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

なので、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\end{aligned} \tag{13.10}$$

と書ける。（3 次元の極座標ではどうなるか各自やってみてください。）

さて、3 次元の座標に戻って、位置ベクトルをその座標系の単位ベクトルで書くとデカルト座標では

$$\vec{r} = (x,y,z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{13.11}$$

と書けるが、極座標では

$$\vec{r} = (r,\theta,\varphi) \neq r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + \varphi\vec{e}_\varphi \tag{13.12}$$

とは書けない。

極座標では

$$\underline{\vec{r} = (r,\theta,\varphi) = r\vec{e}_r} \tag{13.13}$$

となる。（ここが要注意）

始めに書いたように、極座標ではθ,φは長さの次元を持たず、(r,θ,φ)は位置を一意的に表すための数値の組に過ぎない。即ち、<u>一般化座標とは次元にはとらわれない座標</u>ということが出来る。

次に、N 個の質点からなる系について考える。束縛条件がないときには、この系の運動を表すのに 3N 個のデカルト座標

$$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\cdots(x_N,y_N,z_N) \tag{13.14}$$

が必要であり、一般化座標についても 3N 個が必要である。

$$q_1 q_2,\cdots q_{3N} \tag{13.15}$$

ここでは一般化座標についてはこのように通し番号で表すことにする。

束縛条件が自由に変化する独立な座標は 3N 個より少なくなり、独立な束縛条件の数が h であるときには、独立な変数の数は(3N−h)個となる。　（この独立な変数の数のことを**自由度** f という。）

一般化座標を用いて位置ベクトルを表すことが出来、

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,q_2,\cdots q_f),(i=1,2,\cdots N) \tag{13.16}$$

となる。

一般化座標を用いる利点は、束縛条件があるときにその条件から決まる自由度 f 個の変数を勝手に選べることである。(ラグランジェの方程式はどのような座標系でも成り立つので、問題を扱いやすいように座標系を自由に選べる。)

それでは、どのように変数を選べばいいだろうか？

■ 一般化座標の具体例

例えば、前に出てきた円環に束縛された質点の運動を考えるときには束縛条件として、

$$x^2 + z^2 = a^2, y = 0 \tag{13.17}$$

を考える必要がある。従って、運動の自由度は

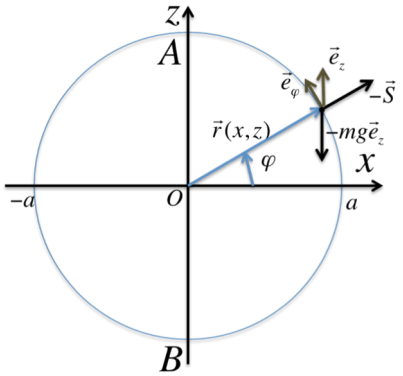

図 1

$f = 3 - 2 = 1$である。そこで、この場合は円環上の質点の位置を表す座標として角度φを用いる。ここでの一般化座標はφである。

もう１つの例として、２重振り子（前回の演習問題）の場合をあげる。おもりの座標はデカルト座標系で

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \tag{13.18}$$

と書けるが、束縛条件として

$$x_1^2 + z_1^2 = l_1^2, (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_2^2, y_2 = y_2 = 0 \tag{13.19}$$

があるため、自由度は２となる。従って、２個の一般化座標を選べば、２つのおもりの位置は指定できる。ここでは、鉛直方向からはかったそれぞれの棒の傾き角φ_1, φ_2　を選ぶ。ここで、φ_2はおもり１の位置での鉛直方向からの角度であり、おもり１の位置は動くが、束縛条件によって、この２つの角度φ_1, φ_2が指定できれば、この２つのおもりの位置を指定することが出来るので、かまわない。

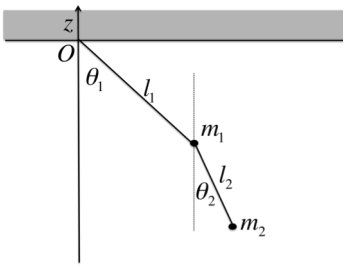

図２

■　一般化力

束縛条件を満たすような変数の組、一般化座標を

$$q_1 q_2, \cdots q_f \tag{13.20}$$

とする。　これを用いてダランベールの原理を書き表す。
まず、仮想変位は

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, (i = 1, 2, \cdots N) \tag{13.21}$$

と書ける。これはデカルト座標では次のようにかける

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta y_i = \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta z_i = \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \tag{13.22}$$

のをまとめてベクトルで表したものである。　$f < 3N$ の場合は $h = 3N - f$ 個の束縛条件があるのだが、この解析では束縛条件は必要としないので、改めて書き出さない。　また、運動している質点を考えているので、座標、一般化座標ともに時間の関数であるが、ダランベールの原理では各時刻の瞬間での位置からの仮想変位を考えるので、時間微分も含まない。
もう一度、N 個の質点に対するダランベールの原理を書くと、

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^a - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \tag{13.23}$$

第 1 項については

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^a\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{f}\vec{F}_i^a\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{f}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^a\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = \sum_{k=1}^{f}Q_k\delta q_k \tag{13.24}$$

と書ける。
ここで

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^a\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{13.25}$$

は、i については和をとっているので系全体の量になっており、系の独立変数（一般化座標）のみに依存する量である。　この Q_k のことを一般化力という。これは、式の最左辺と最右辺が同じ式に書けることから、左辺の力 $\vec{F}_i^a$ に対応してこう呼ぶ。

一般化力 Q_k の次元は

$$\left[Q_k\right] = \left[\vec{F}\cdot\delta\vec{r}_i\right]\left[q_k\right]^{-1} \tag{13.26}$$

なので、q_k が長さの次元を持たないときには、力の次元にはならない。

次に、第２項は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{f}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - m_i\dot{\vec{r}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\right]\delta q_k\end{aligned} \tag{13.27}$$

と書き直すことが出来る。この最後の式の第 1 項の中にある $\dot{\vec{r}}_i$ は

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \tag{13.28}$$

となるので、両辺を $\dot{q}_k$ で偏微分すると

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{13.29}$$

である。すると(13.27)式の最後の式での第 1 項は

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}^2\right) \tag{13.30}$$

となる。また、第 2 項は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{l=1}^{f}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\frac{dq_l}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right] = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \tag{13.31}$$

なので、

$$m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2\right) \tag{13.32}$$

となる。

以上のことから、(13.27)式は

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2\right)\right]\delta q_k \\
&= \sum_{k=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2\right]\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2\right]\right)\right]\delta q_k \\
&= \sum_{k=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k}\right]\delta q_k
\end{aligned} \tag{13.33}$$

となる。ここで、K は全運動エネルギーである。

したがって、一般化座標でのダランベールの原理は

$$\sum_{k=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} - Q_k\right]\delta q_k = 0 \tag{13.34}$$

となる。

■ 一般化座標で表したラグランジェの運動方程式

一般化座標は束縛条件を満たすように運動が記述できる $f<3N$ 個の変数であるので、

各一般化座標 q_k を任意に仮想変位 δq_k させても束縛条件は満たされる。　このような任意の仮想変位に対してダランベールの原理が成り立つためにはすべての k に対して、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial K}{\partial q_k}-Q_k=0 \tag{13.35}$$

が成り立っていなくてはならない。

$\vec{F}_i^a$ が保存力である場合について考える。すると $\vec{F}_i^a$ はポテンシャル $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2\cdots\vec{r}_N)$ を用いて

$$\begin{aligned}\vec{F}_i^a &= -\nabla_i U(\vec{r}_1,\vec{r}_2\cdots\vec{r}_N)\\ &= (-\frac{\partial U(\vec{r}_1,\vec{r}_2\cdots\vec{r}_N)}{\partial x_i},-\frac{\partial U(\vec{r}_1,\vec{r}_2\cdots\vec{r}_N)}{\partial y_i},-\frac{\partial U(\vec{r}_1,\vec{r}_2\cdots\vec{r}_N)}{\partial z_i})\end{aligned} \tag{13.36}$$

と書けるので一般化力は

$$\begin{aligned}Q_k &= \sum_{i=1}^{N}\left(-\nabla_i U\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+-\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\\ &= -\frac{\partial U}{\partial q_k}\end{aligned} \tag{13.37}$$

と書ける。従って、式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial K}{\partial q_k}+\frac{\partial U}{\partial q_k}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial}{\partial q_k}(K-U)=0 \tag{13.38}$$

となる。

ここでラグラジアンを

$$L=K-U \tag{13.39}$$

と<u>定義する</u>と、ポテンシャルは $\dot{\vec{r}}_i$ を含まないので $\dot{q}_k$ も含まず、

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}=0\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \tag{13.40}$$

となる。従って、　式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, (k = 1, 2, \cdots, f) \tag{13.41}$$

となる。

これが、一般化座標を用いて表したラグランジェの運動方程式である。

■ 演習問題

ラグラジアンがデカルト座標で書かれているとき、

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

で定義される p_k は普通の意味の運動量になることを示しなさい。

［解答］

ラグラジアンは

$$L = K - U = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U(\vec{r}_i)\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - U(\vec{r}_i)\right]$$

である。いま $q_k = x_i$ とすると、

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i\dot{x}_i$$

となり、i 番目の質点の運動量の x 成分である。