平成 26 年度
物理学基礎　講義資料
第 13 回

座標系の相対運動（2）

−回転運動−

生命医科学部医工学科

2014/7/10

前回は静止系に対して等速運動している座標系での運動を考え、どちらの系でも運動方程式は同じであることを導いた。このように運動方程式が同じである座標系を慣性系という。しかし、並進加速度運動をする系では、運動方程式に慣性力の項が加わることを学んだ。今回は、静止座標系に対して回転運動している座標系について考える。

- 角速度ベクトル
- ベクトルの回転
- 慣性系に対して回転運動をしている座標系
- 遠心力とコリオリ力
- 演習問題

■　角速度ベクトル

まず回転運動している座標系での運動方程式を取り扱うための準備として、角速度とベクトルの回転を記述する方法について学ぶ。

ここで回転運動を次のように定義する。「点がある軸に対して一定距離を保ったまま移動する運動を回転運動という。」　この軸のことを回転軸という。

回転運動による、点の位置の変化について考える。

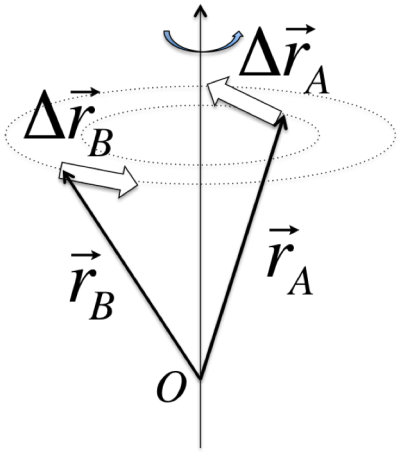

図 1

回転による点の位置の変化を一つの変位ベクトル $\Delta\vec{r}$ で表すことは出来ない。並進運動とは異なり、変位の向きや大きさが点の位置によって異なるからである。それでは、回転運動をまとめてベクトルを使って表すことは出来ないだろうか？　回転は回転軸周りの回転角の大きさで表すことが出来る。

それでは、ある有限角度の回転について次のことを考えてみよう。

（1）　z 軸周りの 90°（$\vec{\varphi}_z$)回転を行い、その次に x 軸周りに 90°（$\vec{\varphi}_x$)回転する。

（2）　順番を逆にして、x 軸周りに 90°（$\vec{\varphi}_x$)回転してから z 軸周りに 90°（$\vec{\varphi}_z$)回転する。

この 2 つは異なった状態になる。

すなわち、この回転のベクトルは

$$\vec{\varphi}_x + \vec{\varphi}_z \neq \vec{\varphi}_z + \vec{\varphi}_x \qquad (13.1)$$

となり、交換則が成り立たない。従ってこのように交換則が成り立たないベクトルを定義することは出来ない。しかし微小回転角変化の場合は

$$\Delta\vec{\varphi}_x + \Delta\vec{\varphi}_z \approx \Delta\vec{\varphi}_z + \Delta\vec{\varphi}_x \qquad (13.2)$$

となり、無限小回転の極限では

$$d\vec{\varphi}_x + d\vec{\varphi}_z = d\vec{\varphi}_z + d\vec{\varphi}_x \qquad (13.3)$$

と交換則を満たすのでベクトルが定義できる。このベクトルの向きはその回転の向きに右ねじをまわしたときにねじの進む向きとする。

無限小回転自体はほとんど意味がないが、単位時間あたりの回転角を表すベクトル（**角速度ベクトル**）$\vec{\omega}$ はその定義、

$$\vec{\omega} = \qquad (13.4)$$

から、　ベクトル $d\vec{\varphi}$ を dt で割ったものであるので $d\vec{\varphi}$ と同じ向きのベクトルである。角速度は等速円運動のときにも出てきたが、このときはスカラー量 $\omega = |\vec{\omega}|$ としてその大きさだけを考えた。ここでは、ベクトルとして扱っている。　角速度の定義(13.4)式から、微小時間 Δt での角度の時間変化は近似的に

$$\Delta\varphi \approx \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{13.5}$$

とかくことが出来、無限の時間 δt では

$$d\varphi = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{13.6}$$

となる。回転軸から r だけ離れた点の Δt での変化の大きさは

$$|\Delta\vec{r}| \approx r\Delta\varphi = r \tag{13.7}$$

であり、無限小の時間では

$$|d\vec{r}| = \underline{\qquad\qquad} \tag{13.8}$$

である。ここで定義された角速度ベクトルを使って、次に（位置）ベクトルの回転について定義する。

■　ベクトルの回転

それでは、ある軸の周りで角速度 $\vec{\omega}$ で回転している任意のベクトル $\vec{A}$ の単位時間あたりの回転 $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ を角速度 $\vec{\omega}$ を用いて表す方法を求める。

ベクトルは向きと大きさを求めれば指定される。ベクトルの回転の様子はベクトル　の始点が回転軸上にあるように図のように座標をとる。時間 Δt の間の回転によるベクトル $\vec{A}$ の変化 $\Delta\vec{A}$ は図からわかるように、Δt と $\vec{A}$ に垂直である。

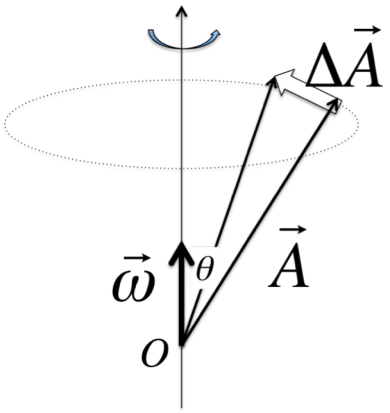

図 2

$$\Delta\vec{A} \perp \vec{\omega}, \Delta\vec{A} \perp \vec{A} \tag{13.9}$$

又その大きさはベクトル $\vec{A}$ と $\vec{\omega}$ の角度を θ とすると、

$$|\Delta\vec{A}| \approx \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{13.10}$$

である。　このようなベクトルはベクトル積（ベクトルの外積）を用いると、向きも含めて表すことが出来る。

$$\Delta\vec{A} \approx \qquad (13.11)$$

両辺を Δt で割って、極限をとると

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \qquad (13.12)$$

となる。これが回転によるベクトルの変化率を表す式である。

■ 静止慣性系に対して回転している座標系

静止慣性系（S 系）に対して回転している座標系（S'系）での質点の運動を考える。S'系の原点 O'を回転軸上にとる。　ここでは回転のみを考える。又、回転軸は S'系の z'軸に一致するようにとる。S 系の原点 O や軸はどこにとってもいいので、考えやすいように原点は O'と、z 軸は z'軸と一致するようにとる。

ここでは並進運動は考えないので、このような座標系の取り方をすれば S 系からみた S'系の原点の座標の位置ベクトルは

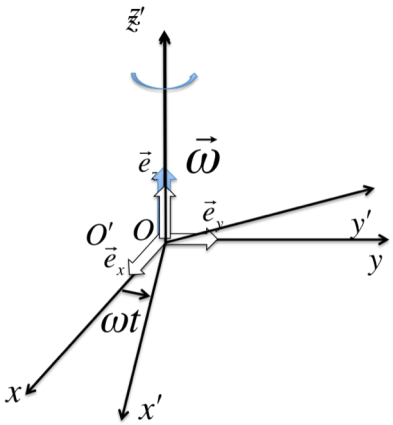

図 3

$$\vec{\mathbf{R}}_{o-o'} = 0 \qquad (13.13)$$

である。即ち

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) \qquad (13.14)$$

となる。　回転の場合は、ベクトルを使ってだけではこの問題を考えにくい。

まず、「座標系における質点の運動の記述」とはどういうことなのかを考える。

座標系における質点の記述とは、質点の運動の観測者がその座標系にいるというと考えてもよい。すると、

S 系での運動の記述は、

→　原点 O や軸 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ は動かず（運動せず）、

質点の速度：$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ (13.15)

質点の加速度：$\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$ (13.16)

と書ける。

S'系での運動の記述は、

→　原点 O'や軸 $\vec{e}_{x'},\vec{e}_{y'},\vec{e}_{z'}$ は動かず（運動せず）、

質点の速度：$\vec{\boldsymbol{v}}'(t)=\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}'(t)}{dt}=\dot{\vec{\boldsymbol{r}}}'(t)=\dot{x}'\vec{\boldsymbol{e}}_x+\dot{y}'\vec{\boldsymbol{e}}_y+\dot{z}'\vec{\boldsymbol{e}}_z$　(13.17)

質点の加速度：$\vec{\boldsymbol{a}}'(t)=\dfrac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}'(t)}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}'(t)=\ddot{x}'\vec{\boldsymbol{e}}_x+\ddot{y}'\vec{\boldsymbol{e}}_y+\ddot{z}'\vec{\boldsymbol{e}}_z$　(13.18)

と書ける。即ち、座標成分(x,y,z)、(x',y',z')を用いた座標系間の関係式からスタートする。

$$\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)+\vec{R}_{o-o'} \tag{13.19}$$

なので、

$$x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z=x'\vec{e}_x+y'\vec{e}_y+z'\vec{e}_z+x_{o-o'}\vec{e}_x+y_{o-o'}\vec{e}_y+z_{o-o'}\vec{e}_z \tag{13.20}$$

である。

まず、前回の扱った座標系が並進運動している場合についてもう一度、考える。

両座標系での速度の関係は　式の両辺を時間微分する。すると

$$\begin{aligned}&\dot{x}\vec{e}_x+\dot{y}\vec{e}_y+\dot{z}\vec{e}_z=\dot{x}'\vec{e}_{x'}+\dot{y}'\vec{e}_{y'}+\dot{z}'\vec{e}_{z'}+x'\dot{\vec{e}}_{x'}+\dot{y}'\dot{\vec{e}}_{y'}+z'\dot{\vec{e}}_{z'}\\&+\dot{x}_{o-o'}\vec{e}_x+\dot{y}_{o-o'}\vec{e}_y+\dot{z}_{o-o'}\vec{e}_z+x_{o-o'}\dot{\vec{e}}_x+y_{o-o'}\dot{\vec{e}}_y+z_{o-o'}\dot{\vec{e}}_z\end{aligned} \tag{13.21}$$

となる。　しかし、

$$\dot{\vec{e}}_x=\dot{\vec{e}}_y=\dot{\vec{e}}_z=0 \tag{13.22}$$

であり、座標系の並進のみの場合は動いている座標系の単位ベクトルも

$$\dot{\vec{e}}_{x'}=\dot{\vec{e}}_{y'}=\dot{\vec{e}}_{z'}=0 \tag{13.23}$$

である。即ち、式は

$$\dot{x}\vec{e}_x+\dot{y}\vec{e}_y+\dot{z}\vec{e}_z=\dot{x}'\vec{e}_{x'}+\dot{y}'\vec{e}_{y'}+\dot{z}'\vec{e}_{z'}+\dot{x}_{o-o'}\vec{e}_x+\dot{y}_{o-o'}\vec{e}_y+\dot{z}_{o-o'}\vec{e}_z \tag{13.24}$$

となる。 加速度についても同様である。　即ち、前回導いた運動方程式が導かれる。

それでは、座標系が回転している場合はどうなるだろうか。

式　より、それぞれの座標系で表したベクトルは同じである。即ち

$$x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z=x'\vec{e}_x+y'\vec{e}_y+z'\vec{e}_z \tag{13.25}$$

である。両辺を時間微分すると

$$\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'} + x'\dot{\vec{e}}_{x'} + \dot{y}'\dot{\vec{e}}_{y'} + z'\dot{\vec{e}}_{z'} \tag{13.26}$$

S'系は回転しているため、式は成り立たず、S'系の単位ベクトルの微分は

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{13.27}$$

となる。

従って、

$$\underline{\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{13.28}$$

となる。(13.28)式から、それぞれの座標系での速度の関係式を書くと

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{13.29}$$

と表すことが出来る。

次に加速度に対する関係式を求める。(13.28)式をさらに時間で微分する。簡単のため等速回転（角速度が一定）の場合だけを考える。即ち

$$\dot{\vec{\omega}} = 0 \tag{13.30}$$

である。ことことから加速度については

$$\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = \tag{13.31}$$

$$\underline{=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

となる。即ち、

$$\underline{\ddot{\vec{r}} =}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{13.32}$$

である。$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}, \vec{a}' = \ddot{\vec{r}}'$ なので、

S 系で質点のニュートンの運動方程式から、

$$\underline{m\ddot{\vec{r}} =}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{13.33}$$

となる。これを S'系での運動方程式に変形すると、

$$\underline{m\ddot{\vec{r}}' =}\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{13.34}$$

が得られる。　回転系で見たときには右辺に $\vec{F}$ 以外の項を含むため、この回転座標系 S'系

は慣性系ではない。　右辺の第２項、第３項が回転しているため生じる慣性力の項で、それぞれ**コリオリ力**、**遠心力**という。

このように、回転座標系や前の回で扱った加速度並進運動をしている座標系で扱うと、慣性力という余計な（？）力が現れてきて複雑になってしまう。質点の運動は慣性系（静止座標系を含む）で扱えば，わかっている力だけを扱えばいいのですっきりしている。

ではなぜ、わざわざ慣性系でない座標系で運動を取り扱うのだろうか？　私たちは自転している地球上に住んでいる。まさに、S'系で運動を観測しているのである。普段目にする運動は自転の時間スケールに比べてずっと小さなスケールなのでほとんど気にせず生活しているが、地表付近でおこる大きなスケールの現象や長時間続くような現象（気象現象や海流など）には自転の影響が表れる。

たとえば、低気圧に向かって吹き込む風は北半球ではコリオリ力のために図４に示すような反時計回りの力を受ける，左巻きに渦巻いているように吹き込む。　南半球では、時計回りの力を受けるため、右巻きの渦巻きになっていることが，回転座標系の運動方程式からもわかり、実際そうなっているのである。

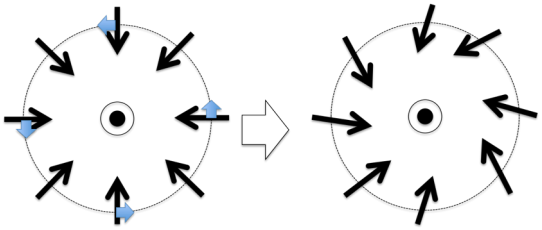

図４

ただし、身の回りでおこるほとんど現象は地表に固定された静止慣性座標系として扱って問題ない。なぜなら、地球の自転の角速度は

$$\omega = \frac{2\pi}{24hours} = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60\sec} \approx 7.272\times 10^{-5}\, rad/\sec \qquad (13.35)$$

と大変小さく、コリオリ力が重力加速度の 1%程度の大きさになるためには

$$\left|2\vec{\omega}\times\vec{v}\right| = 2\left|\vec{\omega}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta < 2\left|\vec{\omega}\right|\left|\vec{v}\right| = 0.01\left|\vec{g}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \frac{0.01\left|\vec{g}\right|}{2\left|\vec{\omega}\right|} \approx 673.8\, m/\sec \approx 2425\, km/h \qquad (13.36)$$

と時速約 2400km という速度で運動してなければならないからである。

偏西風もコリオリ力によって生じた風であるが、その速度は上空 5000~10000m 付近では時速 300km という速さである。この場合は時間、空間規模が大きいため，小さなコリオリ力でもこのような大きな風の動きとなって現れる。

■　遠心力とコリオリ力

さて、遠心力とコリオリ力についてもう少し詳しく調べてみる。

（１）　遠心力

まず遠心力

$$\vec{F}'_{cen} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \quad \text{（定義）} \tag{13.37}$$

について考える。

これまでと同じように回転座標系 S'系から見た物理量に’を付ける。　遠心力（）は角速度ベクトルを含むベクトル積で与えられているので，角速度ベクトル　に垂直である。ただ、S'系にいる観測者からはその軸の回転は見えず、あたかも遠心力という慣性力が加わっているように物体の運動がみえる。

さて、遠心力の定義に現れるベクトルの演算であるが、ベクトル積の公式

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) \tag{13.38}$$

を使うと、

$$\vec{F}'_{cen} = \tag{13.39}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

となる。ここで、$\vec{e}_\omega$ は $\vec{\omega}$ 方向の単位ベクトルである。この式の［　］内は図 5 に示すような回転軸から質点の位置 P へ向かうベクトル

$$\vec{\xi}' = \vec{r}' - (\vec{e}_\omega\cdot\vec{r}')\vec{e}_\omega \tag{13.40}$$

である。従って、遠心力は

$$\vec{F}'_{cen} = m\omega^2\vec{\xi}' \tag{13.41}$$

と書くことが出来る。つまり遠心力は、質点の質量 m と差表軸の回転の角速度の 2 乗と，回転軸からの距離 $\left|\vec{\xi}'\right|$ に比例して、軸からはなれる向き $\vec{e}_{\xi'}$ に向かう力である。(それで中心から遠ざかる方への力という名前が付けられている。)　特に質点の運動が $\vec{\omega}$ に垂直な平面内に限られているときは、原点をその面内にとれば、$\vec{\xi}' = \vec{r}'$ なので、

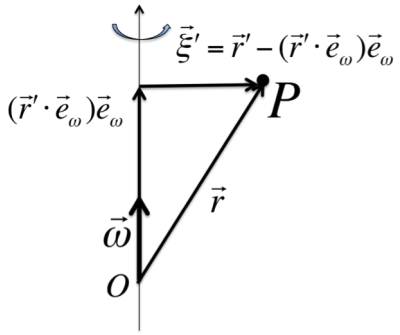

図 5

$$\vec{F}'_{cen} = m\omega^2\vec{r}' \tag{3.42}$$

となる。

（2） コリオリ力

次にコリオリ力

$$\vec{F}'_{Corio} = -2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\dot{\vec{r}}'\times\vec{\omega} \tag{3.43}$$

について、調べてみる。$\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = 0$ のとき、0 なので、回転座標系 S'系で静止している質点，つまり S'系と一緒に回転している質点には働かない。又、この力は $\vec{\omega}$ と $\vec{v}' = \dot{\vec{r}}'$ に垂直である。特に $\vec{v}' = \dot{\vec{r}}'$ が $\vec{\omega}$ に垂直な面内にあるときには $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$ から、

$$\left|\vec{F}'_{Corio}\right| = 2m\left|\dot{\vec{r}}'\right|\left|\vec{\omega}\right| \tag{3.44}$$

となる。

ベクトル積の定義から、$\vec{F}'_{Corio}$ の向きは　図 6 のように上方から見ると（円板が反時計回りに回って見える側）、$\vec{v}' = \dot{\vec{r}}'$ の向きがどちらを向いていても $\vec{v}' = \dot{\vec{r}}'$ に対して右向きに働くように見える。円板の裏側（円板が時計回りに回っているように見える側）から見ると $\vec{F}'_{Corio}$ は $\vec{v}' = \dot{\vec{r}}'$ の左側に向くように働いているように見える。

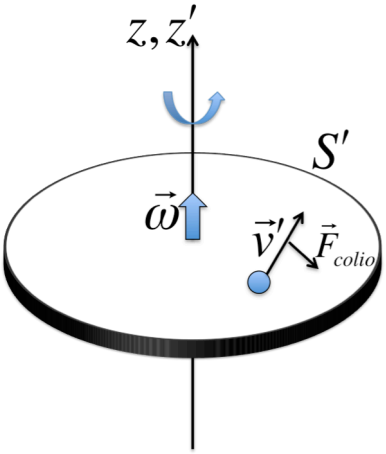

図 6

■　回転座標系での運動の記述例

（1） 慣性系に対して回転している円板上に静止している物体の運動

簡単な例と用いて、回転座標系（S'系）での慣性力（コリオリ力や遠心力）の意味を確認する。円板が慣性系 S 系に対して角速度 $\vec{\omega}$ の回転をしているとする。　S'系の原点をこの円板の中心 O'とする。円板の面内に x', y' 軸をとり、円板に主直な軸を z' 軸とする。この円板は S 系から見ると z' 軸の周りに角速度 $\vec{\omega}$ で回転している。

慣性系 S 系の原点 O は O'と一致してさせて、z 軸を z' 軸に一致するように選ぶ。

ここでは円筒座標系、(ξ, φ, z) 、(ξ', φ', z') を用いる。　時刻 $t = 0$ で x 軸と x' 軸とが一致しているとすると、$\varphi = \varphi' = 0$ である。　質量 m の質点はこの円板上の S'系の座標、$(b, 0, 0)$ に静止しているものとする。　この質点の時刻での S 系での座標は

$$(\xi,\varphi,z)=(b,0,0) \tag{3.45}$$

である。　これは半径 b 、角速度 $\vec{\omega}$ の等速円運動であるので、加速度は $(a_\xi,a_\varphi,a_z)=(-b\omega^2,0,0)$ である。　従って、等速円運動をするこの質点に働く力は，円運動の中心に向かう向心力

$$\vec{F}=-mb\omega^2\vec{e}_\xi \tag{3.46}$$

が働いているはずである。この力は、どこからくるのだろうか？

この力は円板表面との摩擦力によるものである。

さて、同じ質点を S'系でみてみる。　この質点はと静止しているため、コリオリ力は働かず、遠心力 $mb\omega^2\vec{e}_\xi$ のみが働いている。　しかし、この質点は静止しているので S'系においては力は働いていない。即ち、

$$m\vec{a}=\vec{F}'=0=\vec{F}+mb\omega^2\vec{e}_\xi \tag{3.47}$$

である。　このことから、

$$\vec{F}=-mb\omega^2\vec{e}_\xi \tag{3.48}$$

である。

この力は、S 系からみたこの質点の運動，等速円運動の原動力である向心力（中心力）すなわち摩擦力と同じである。

［演習問題］地球の赤道付近の見かけの重力加速度は地球が自転していない場合の値に比べて，大きいか小さいか？又その違いは何%程度か？

地球の半径は約 $6.4\times10^6[m]$ で、自転の周期は 1 日とする。