平成 26 年度

物理学Ⅰ　講義資料

第 14 回

解析力学（5）

−ラグランジェの未定乗数法−

生命医科学部医工学科

2014/7/17

目標：拘束条件がある系の運動を取り扱う方法としてのラクランジェの未定乗数法というのを学ぶ。物理では現象を数学的に取り扱うための様々な手法が提案されてきた。これはその中の一つである。

- ラグランジェの未定乗数法
- 一般の場合の定式化
- 演習問題

■ ラグランジェの未定乗数法

拘束条件がある運動系（力学系）を扱う別の方法としてラグランジェの未定乗数法というのがある。この方法は多くの運動を解く場合に対してとても便利である。

今、ラグラジアン $L(q,\dot{q},t)$ で表せる系が A 個の拘束条件がついた N 個の運動（力学）変数 $q(t)=(q_1(t),q_2(t),...,q_N(t))$ を持つ場合について考える。拘束条件は

$$C_a(q(t))=0,(a=1,2,...A) \qquad (14.1)$$

と書ける。

この系の運動 $q(t)$ の安定解は最小作用の原理を満たすので、任意の微小変位 $\delta q(t)$（ただし、$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$）に対して、

$$\delta S=S[q+\delta q]-S[q]=\int_{t_1}^{t_2}dt(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i=0 \qquad (14.2)$$

を満たす必要がある。　ここで、拘束条件のために N 個の微小変位 δq_i に対してもすべてが独立にはならない。即ち、最小作用の原理を満たすと同時に、もも拘束条件を満たさないといけない。即ち、

$$0=C_a(q+\delta q)=C_a(q+\delta q)+\frac{\partial C_a(q)}{\partial q_i}\delta q_i+O(\delta q^2)(a=1,2,...A) \qquad (14.3)$$

である。このため、微小変位 $\delta q(t)$ は次の拘束条件を満たすものに限られる。

$$\frac{\partial C_a(q)}{\partial q_i}\delta q_i=0(a=1,2,...A) \qquad (14.4)$$

この場合の最小作用の原理（積分が停留（極値）をとるための条件）はどのようになるだろうか。

（１）　$N=2$、$A=1$ の場合

まず簡単な場合について考える。　力学変数 $q(t)=(q_1(t),q_2(t))$ として $(x(t),y(t))$ をとる。拘束条件を

$$C(x,y)=0 \qquad (14.5)$$

として、(14.2)式と(14.4)式はそれぞれ

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})\delta x+(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}})\delta y\right]=0 \qquad (14.6)$$

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}\delta y=0 \qquad (14.7)$$

と書ける。

(14.7)式より、$\delta y=-\frac{\partial C(x,y)/\partial x}{\partial C(x,y)/\partial y}\delta x$ となるので、これを(14.6)式の代入する。

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)+\lambda\frac{\partial C}{\partial x}\right]\delta x=0 \qquad (14.8)$$

となり、ここで

$$\lambda(t)=-\left(\partial C(x,y)\middle/\partial y\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) \qquad (14.9)$$

である。

(14.8)式が任意のδxに対して成り立つためには

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)+\lambda\frac{\partial C}{\partial x}=0 \qquad (14.10)$$

が成り立たなければならない。　また(14.9)式より、

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}+\lambda(t)\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}=0 \qquad (14.11)$$

が得られる。従って、この系はこの 2 つの式と拘束条件 (14.5)の 3 つの式を解けばいい。　この 3 つの式を見ると変数が$(x(t),y(t),\lambda(t))$となっていることがわかる。

ここで導入した$\lambda(t)$を未定乗数という。

■ $N=2$、$A=1$の例：滑車にかかった 2 つの質点

図のように滑車に伸びない紐でつながれた質点がつり下げられている。この系の力学変数としてそれぞれの位置$(x_1(t),x_2(t))$をとる。

初期条件を、$x_1(0)=X_0,\dot{x}_1(0)=0$,

$x_2(0)=L-X_0,\dot{x}_2(0)=0$とする。

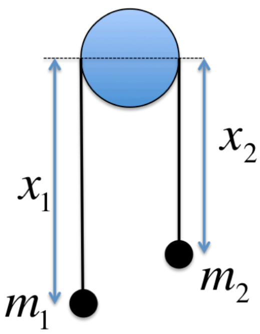


図 14.1

この系のラグラジアンは

$$L(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2,t)=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+m_1gx_1+m_2gx_2 \qquad (14.12)$$

である。又拘束条件は

$$C(x_1,x_2)=x_1+x_2-L=0 \qquad (14.13)$$

である。

この系に対して、未定乗数法を使うと

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}+\lambda(t)\frac{\partial C(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0\Rightarrow m_1\ddot{x}_1=m_1g+\lambda \qquad (14.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}+\lambda(t)\frac{\partial C(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0 \Rightarrow m_2\ddot{x}_2=m_2 g+\lambda \qquad (14.15)$$

となり、この３つの式(14.13~15)を解けばいい。

(14.14)式−(14.15)式をすると、$\lambda(t)$ を消去することが出来て、(14.13)より $\ddot{x}_2=-\ddot{x}_1$ なので

$$\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}_1=\left(m_1-m_2\right)g \qquad (14.16)$$

が得られる。　これを解き、初期条件から解は、次のようになる。

$$x_1(t)=\frac{\left(m_1-m_2\right)}{2\left(m_1+m_2\right)}gt^2+x_0,\quad x_2(t)=L-x_1(t)=-\frac{\left(m_1-m_2\right)}{2\left(m_1+m_2\right)}gt^2+L-x_0 \qquad (14.17)$$

最後に未定乗数 $\lambda(t)$ についても求めてみよう。(14.14)、(14.15)式をみて気づくとおもうが、この場合は $\lambda(t)$ はひもの張力に対応し、

$$\lambda(t)=-\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g \qquad (14.18)$$

となる。

■ 一般の (N,A) の場合。

それでは一般の (N,A) の場合のラグランジェの未定乗数法を導いてみる。

出発点は(14.2)式と(14.4)式

$$\delta S=S[q+\delta q]-S[q]=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i=0 \qquad (14.2)$$

$$\frac{\partial C_a(q)}{\partial q_i}\delta q_i=0(a=1,2,...A) \qquad (14.4)$$

である。最初の例と同じで、(14.4)式の左辺に任意関数 $\lambda_a(t)(a=1,2,....A)$ をかけたも

式もゼロでこれを(14.2)式の被積分関数に加えた式についても以下の関係が成り立つ

。

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\lambda_a\frac{\partial C_a}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0 \qquad (14.19)$$

（14.19）式の N 個の微小変位 δq_i はA個の拘束条件のために、すべてが独立にはならない。そこで、例えば $(\delta q_1,\delta q_2,......,\delta q_{N-A})$ は独立なものとして、残りの

$(\delta q_{N-A+1}, \delta q_{N-A+2}, ...\delta q_N)$ はA個の拘束条件から$(\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_{N-A})$ を用いて表すことが出来る。（ただし、陽に解く必要はない）

A個の関数$\lambda_a(t)$は任意なので, 特に簡単な例と同じように任意の変位δq_iについて成り立つために，次のA個の条件を満たすように選べばよい。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda_a \frac{\partial C_a}{\partial q_i} = 0, (i = N - A + 1, N - A + 2, ...N) \tag{14.20}$$

すると(14.19)式は

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{N-A} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda_a \frac{\partial C_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \tag{14.21}$$

となるが$N - A$個の微小変位δq_iは独立なので、被積分関数そのものがゼロでなければならない。即ち、

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda_a \frac{\partial C_a}{\partial q_i} = 0, (i = 1, 2, ..., N - A) \tag{14.22}$$

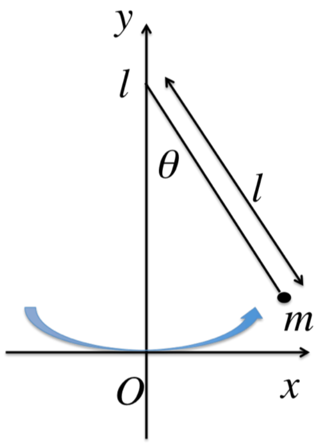
となる。

結局解くべき方程式は(14.20)式と(14.22)式と拘束条件の式(14.1)の３つである。

（実際は式の数としては N+A 個になり、N 個の力学変数と A 個の未定乗数の N+A

この変数を求めることになる。）

■　演習問題



図のような単振り子の系の運動をおもりの座標 $(x(t), y(t))$ を力学変数にとり，ラグランジェの未定乗数法を用いて考える。

（１）　この系のラグラジアン $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ と拘束条件を表す関数 $C(x, y)$ を書きなさい。

（２）この系の変数に対するラグランジェの未定乗数法の運動方程式をかきなさい。

（３）振り子の原点周りの振れが小さい（$\left|x/l\right| << 1$）とした場合はこの運動方程式と拘束条件から x は近似的に単振動となることを示しなさい。

解答：

（１）　ラグラジアンは位置エネルギーを原点 O を基準にとり考えると

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

となる。又、拘束条件は

$$C(x, y) = \sqrt{x^2 + (l-y)^2} - l$$

である。

（２）　運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = \lambda\frac{x}{\sqrt{x^2 + (l-y)^2}} = \lambda\frac{x}{l}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = -mg - \lambda\frac{l-y}{\sqrt{x^2 + (l-y)^2}} = -mg - \lambda\frac{l-y}{l}$$

となる。

（３）　$C(x, y) = \sqrt{x^2 + (l-y)^2} - l = 0$ から

$l - y = \sqrt{l^2 - x^2} = l\sqrt{1 - x^2/l^2} \approx l(1 - x^2/2l^2)$ と近似でき

$y/l \approx x^2/2l^2$ となる。

いま、$\left| x/l \right| << 1$ なので、（２）で求めた y に関する運動方程式で y と $\ddot{y}$ に関する項は大変小さいとすると、$\lambda \approx -mg$ となる。

これを x に関する運動方程式に代入すると、

$$m\ddot{x} \approx -mg\frac{x}{l} \Rightarrow \ddot{x} \approx -\left(\frac{g}{l}\right)x$$

を得る。これは単振動の方程式である。