平成 26 年度

物理学基礎　講義資料

第 14 回

様々な運動

−運動方程式で運動を表現する。−

生命医科学部医工学科

2014/7/17

これまで学んだ数式を用いた運動の取り扱いをつかって記述できる例をいくつか学ぶ。どのようなところで、運動方程式や保存法則が使われているだろうか。これまでの復習として、今回は様々な運動を取り扱ってみる。

- ■　粘性力：スカイダイビング
- ■　振動運動
- ■　演習問題

■ 粘性力：　スカイダイビングの原理

スカイダイビングは，空気による粘性の摩擦力の効果をうまく利用している。
スカイダイバーの運動について考えてみよう。

スカイダイバーは飛行機からはなれると、重力により下方に加速される。スカイダーバーの速度が大きくなるにつれて空気による抵抗力が大きくなり、最終的に抵抗力と重力がほぼ釣り合う。　このため、ある速度でダイバーは等速度で落下をする。このときの速度を終端速度という。

スカイダイビングの運動を調べてみよう。　運動は鉛直下向きのみにあるとして 1 次元で考え、地表が $x=0$ となるように鉛直上向きに x 座標をとる。　この座標では重力は

$$F_g = -mg \qquad (14.1)$$

と書ける。空気による抵抗は速度の 2 乗に比例するとし、その比例係数を C とする。従って、ダイバーに働く力は次のように表すことが出来る。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　(14.2)

落下速度が大きくなり重力と空気による抵抗力が釣り合い、$F=0$ なったときの速度が終端速度である。
即ち、終端速度は

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　(14.3)

となる。
さて、ダイバー（質量）の運動方程式を書くと、

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　(14.4)

となる。これを解いて、ダイバーの落下速度の時間変化を求めてみよう。
（働く力の変数が速度なので、まず速度に対する微分方程式を解く。）
これを解くには、　式で求めた終端速度を用いて

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　(14.5)

と変形し、次の積分をすればいい。

(14.6)

この積分の結果は

(14.7)

となる。
さらに、ある時間内にダイバーが落下した距離を求めるには　式を積分すればよい。即ち、

(14.8)

である。　この積分の結果は

(14.9)

となる。
例えば、ダイバーの体重（質量）を $70kg$ として、この運動を考えてみよう。そのときの手足を広げた姿勢での終端速度はおよそ時速で $200[km/h]$ となるそうである。（秒速ではおよそ $55\left[{}^{m}\!/_{\sec}\right]$ である。）このときの速度の時間変化をグラフで書くと、図のようになる。厳密には時刻が無限大にならないと終端速度にならないが，指数関数は時間とともに急速に０に近づくので、$t >> {}^{v_f}\!/_{2g}$ であれば速度はほぼ終端速度となる。　この場合は

およそ $11\sec$ 後にはダイバーはほぼ終端速度 $55\left[{}^{m}\!/_{\sec}\right]$ に到達して等速度で落下する。

この時間でダイバーは約 $400[m] \approx 55[m/\sec]*11[\sec]$ の距離を落下する。これ以上の距離を落下する時には終端速度等速落下していく。空気抵抗が有るときと無いときの落下距離を比較して見ると、図のようになる。高度 $1400[m]$ からダイバーが落下したとき、もし空気抵抗がないと約 $17[\sec]$ で地表についてしまうが、空気抵抗があるおかげで地表につくまで $30[\sec]$ ぐらいの時間があることになる。　実際は地表近くで更に空気抵抗を大きくするためにパラシュートを使い、終端速度をさらに小さくして、安全に着地

することが出来る。

■ 調和振動と減衰振動

自然現象の中には様々な振動現象が見られる。(振り子の運動もそうであるが、様々楽器の音を鳴らす仕組みの中にも振動を利用したものがあるし、電波も振動現象である。他にも生物の個体数の変化も振動現象のモデルで説明することが出来る。)

このような振動現象の運動を解析するために，運動方程式を解く必要が出てくる。

アーチェリーでは選手が矢を射るときの弓の動きは弓の弦からの弾性力（バネの力）により生じる。 例えば選手が弦を引く力が$134[N]$(=13.7 kg 重)、引きの長さ$0.72[m]$をとすれば、この弓のバネ定数は

$$k = \frac{|\vec{F}|}{d} = \frac{134}{0.72} = 186\left[{}^{kg}\!/\!_{\sec^2}\right] \qquad (14.10)$$

で与えられる。 選手が弦を離した後の矢の運動はニュートンの運動方程式から

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \qquad (14.11)$$

と書ける。 この微分方程式を解いて矢が弓からはなれるときの速度を求めることが出来る。 ここでは次のように変数を変換して微分方程式を変換する。

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad (14.12)$$

これを、式に代入して積分形にすると、次のようになる。

$$mv\frac{dv}{dx} = -kx \rightarrow mvdv = -kxdx \qquad (14.13)$$

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ (14.14)

これを書き直すと、

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ (14.15)

が得られる。 従って、矢が弓の弦を離れるときの速度は

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ (14.16)

となる。この式から、弓の引きが大きいほど矢は大きい速度で放たれることがわかる。

例えば、矢の重さを 25g とすると、この速度は

(14.17)

となる。　この速度は時速にするとおよそ $224[km/h]$ となる。　（新幹線並み！）

アーチェリーの矢は弦からはなれて飛んでいってしまうが、弦から離れるまでの運動方程式はバネのさきに結びつけられた質点の運動を表す運動方程式と同じである。　このようなバネの伸び（または縮み）に比例する復元力による運動を調和振動という。

調和振動の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{14.18}$$

と書くことが出来る。　この方程式はどうやって解けばいいだろうか。

式　で用いた変数変換を利用して解くことが出来る。　しかし、そうしなくても，この式は三角関数の微分を知っていれば解くことが出来る。三角関数の形式で $\cos\omega t$ 、$\sin\omega t$ において、角振動数 ω を

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.19}$$

とおけば、式を満たすことがわかる。従って、式の一般解は、A, B を任意定数として、

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

となる。ここで任意定数は初期条件で決定される。　同じ式を別の形に書くと

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) \tag{14.20}$$

と書ける。式　と　の間の定数の間には

$$A = a\cos\alpha, B = -a\sin\alpha \tag{14.21}$$

の関係がある。式の a を振動運動の振幅、α を初期位相という。

このことから、この振動子の運動は周期 $T = 2\pi/\omega$ 、振動数 $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ の運動である。

少し、振動運動について詳しく調べてみよう。実際の振動運動にはバネによる弾性力だけでなく摩擦力も働いている。ここでは速度に比例する摩擦力が働いているとする。
このような運動の運動方程式は

(14.22)

と書ける。
この微分方程式を解いてみよう。この方程式を次のように変形する。

(14.23)

ここで、$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m}\right)$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$（この式で（）の部分を x という関数に“1 階、2 階の微分という作用をする”という意味で作用素という。）この式を作用素の積の形に書き直すと

(14.24)

となる。（微分因子の積で表すという。）
この解は、微分因子のどちらかが関数 $x(t)$ に働いたとき 0 になるとして求めることが出来る。
これを書けばそれぞれ

(14.25)

(14.26)

となる。それぞれの解は

(14.27)

(14.28)

である。一般解は　式と式の和である。

(14.29)

ここで、

(14.30)

とおくと、

――――――――――――――――――― (14.31)

となる。指数関数の項は双曲関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (14.32)$$

を使って

――――――――――――――――――― (14.33)

となる。

一般解の係数 C, C' は境界条件（初期条件や時間無限大での値）を満足するように決められる。特に $\gamma = \omega_0$ のとき、(14.33)式の第 2 項は定数係数が無限大でない限り常にゼロになる。

で解が正しい形に（有限の値をとるため）なるためには一般解の C' は　$C' = D(\gamma^2 - \omega_0^2)^{-\frac{1}{2}}$ と

ととればよい。したがって，一般解は

――――――――――――――――――― (14.34)

となる。ここで、$t = 0$ での境界条件 $x(0) = x_0$ 、$v(0) = v_0$ を代入すると

――――――――――、――――――――――― (14.35)

となる。

この運動は運動方程式の定数係数 γ, ω_0 の相対的な大きさにより異なったものになる。

これを(Ⅰ) $\gamma = \omega_0$，（Ⅱ） $\gamma > \omega_0$ 、(Ⅲ) $\gamma < \omega_0$ の 3 つの場合に分けて考える。

(Ⅰ) $\gamma = \omega_0$ の場合：　解は(14.34)式で sinh の項を級数展開して、$\gamma = \omega_0$ の極限の式を用いることにより、

――――――――――――――――――― (14.36)

となる。

(Ⅱ) $\gamma > \omega_0$ の場合：解は(14.34)式を整理して、

――――――――――――――――――― (14.37)

となる。

（Ⅲ）$\gamma < \omega_0$ の場合：解は(14.34)式の平方根が

$$\rule{8cm}{0.4pt} \qquad (14.38)$$

となるので、

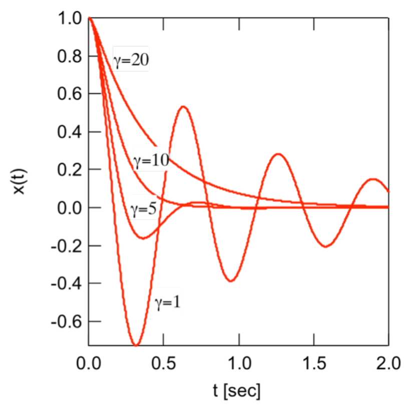
$$\sinh(ix) = i\sin x, \cosh(ix) = \cos x \qquad (14.39)$$

を用いて、

$$\rule{8cm}{0.4pt} \qquad (14.40)$$

とかける。

この三つの場合を、$x_0 = 0, v_0 = 0, \omega_0 = 10[rad/s]$ として、γ を変えた場合の $x(t)$ の振る舞いをグラフにしてみると次のようになる。

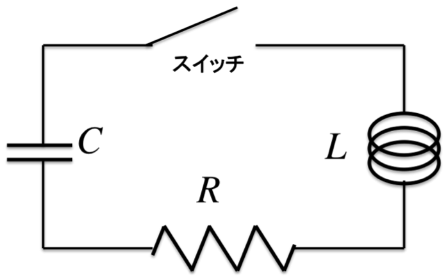


（Ⅰ）$\gamma = \omega_0$ の場合の振る舞いを臨海減衰、

（Ⅱ）$\gamma > \omega_0$ の場合は過減衰という。また

（Ⅲ）$\gamma < \omega_0$ の場合は減衰振動という。

■ 演習問題



図のような電気回路のスイッチを閉じたときに回路全体の電位差はゼロとならなければならない。このとこは回路を流れる電流 $i(t)$ と、コンデンサーC に存在する電荷 $q(t)$ を用いて次の微分方程式の形で書くことが出来る。

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

電流と電荷の間には次の関係がある。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

これを使って、始めの微分方程式を書き直し、この方程式を解きなさい。