光学

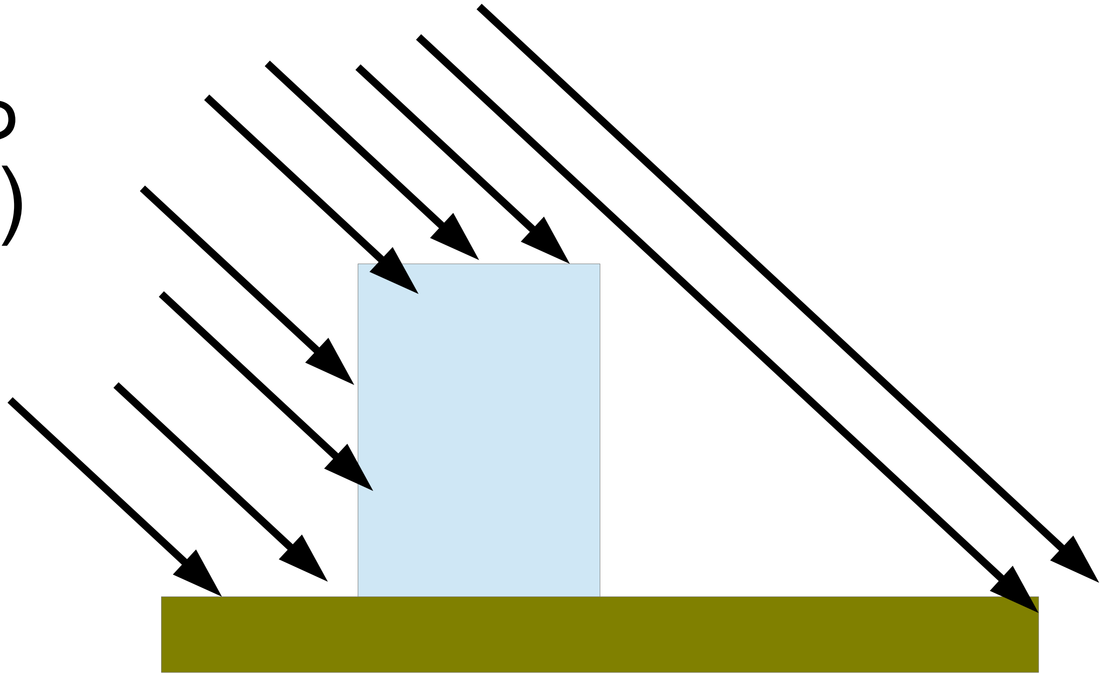
- 旧約聖書 創世記 第1章 第1節
  - 初めに、神は天地を創造された。
  - 地は混沌であって、闇が深淵の面にあり、神の霊が水の面を動いていた。
  - 神は言われた。「光あれ。」こうして、光があった。
  - 神は光を見て、良しとされた。神は光と闇を分け、光を昼と呼び、闇を夜と呼ばれた。夕べがあり、朝があった。第一の日である。
- ヘーシオドス「神統記」
  - 最初に カオス（混沌）が生じた。その次にガイア（大地）とタルタロス（冥界）、そして エロース（愛）がともに誕生した。カオスからは エレボス（幽冥）と ニュクス（夜）が生まれ、両神が交わってニュクスは ヘーメラー（昼）とアイテール（清明な大気）を産んだ。

光とはなんなのか

- 夜　　　　　　　　　　　　　　　　　昼

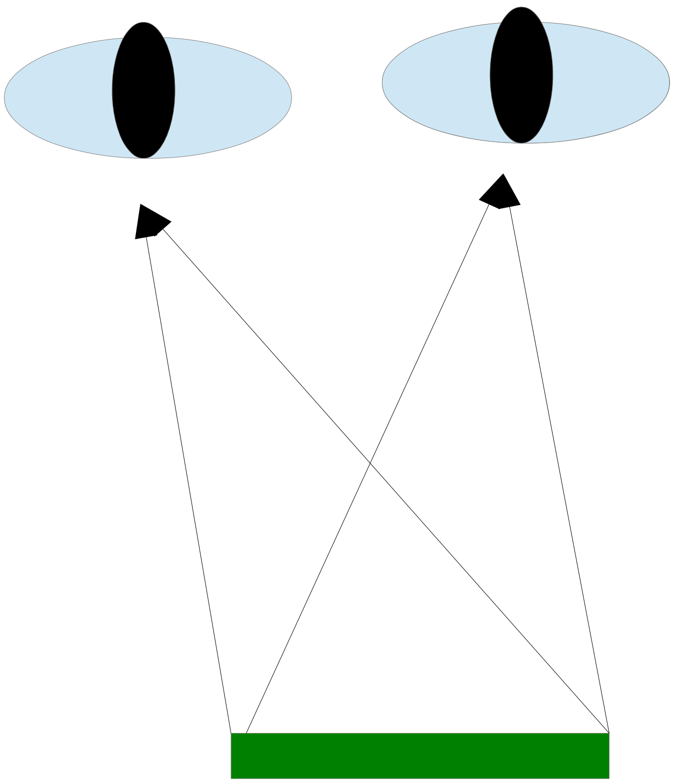
光は「在る」

- 光がなかったら、まったく何も見ることができない。(闇) → 「無い」の基準
- 光が当たらなかったところが、相対的に暗くなる（影)
  → 大小関係
- 光は、有る･無いといえる。 → 存在
- 明るい･くらいといった表現 → 大小関係･量的表現



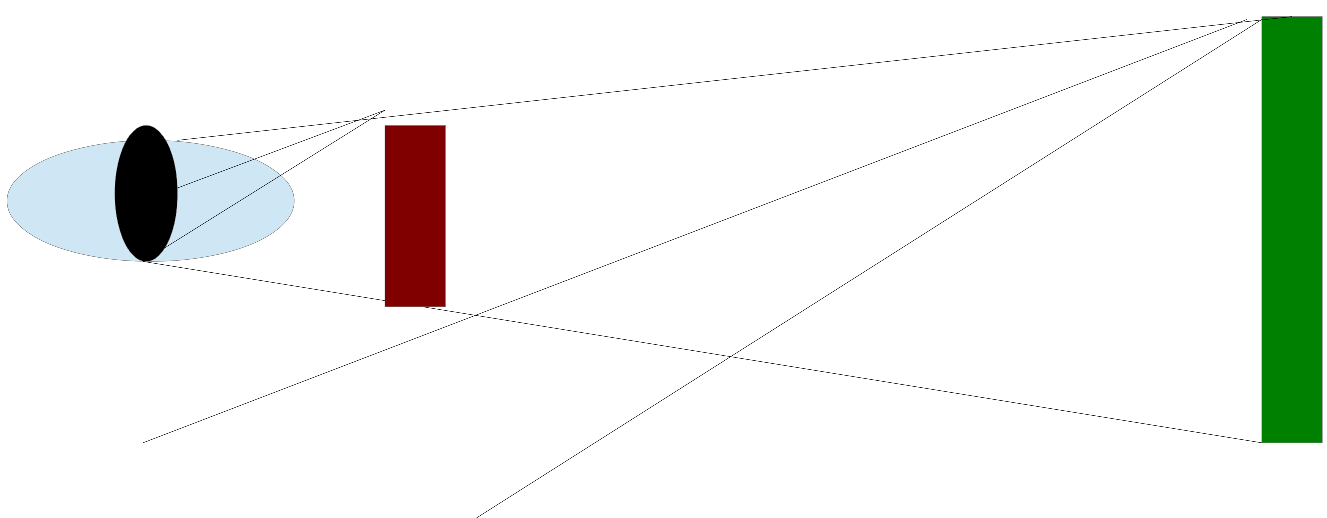
人は光以外では、物体や空間を見ることができない。

- 物体の運動や力などは、「空間」を用いてあらわされているが、空間の**大きさ**や**方向**は、**「光がなければ観測できない。」**
- 光はそれゆえに、空間を扱う数学である幾何学と強く関係している。



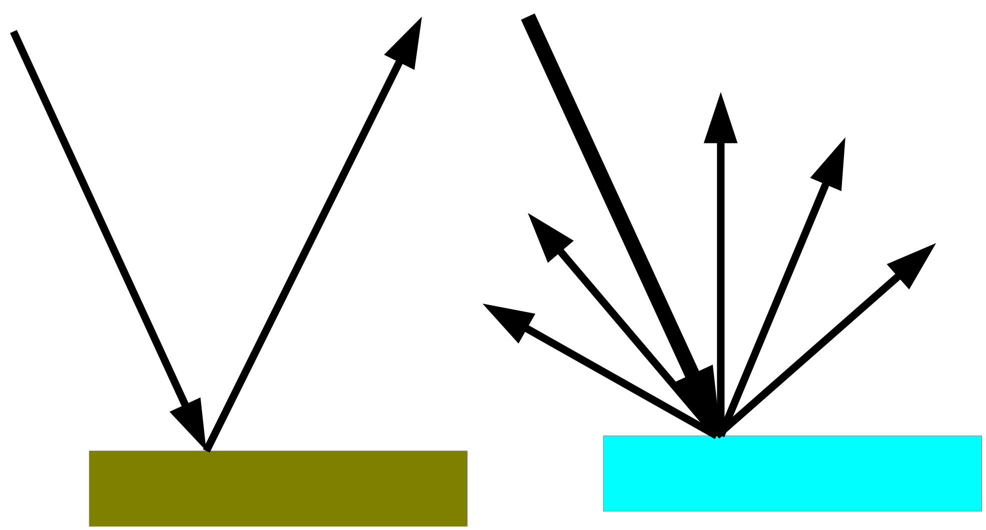
ユークリッド幾何光学

- 光は直進する。
- 光線は物体表面から等方的に発生する。（**散乱**）
- 視線光線も直進し、等方的に発生する。
- 目に見える大きさは、視線光線の角度が大きいほど大きく見える。
- 物体からの光線の数が多いほど明るく見える。



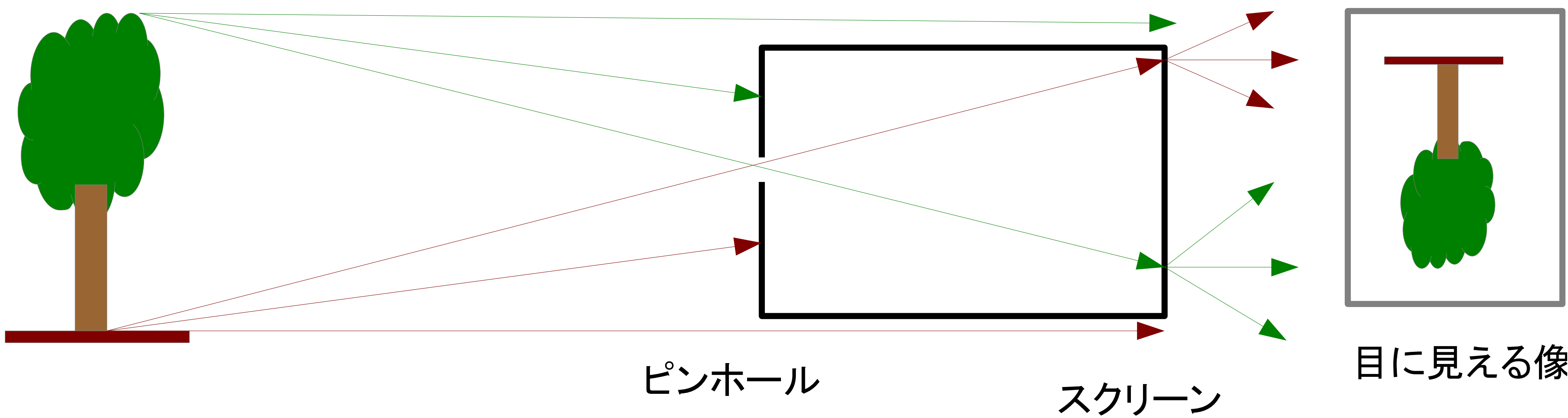
反射と散乱

- よく磨いた金属や水の表面は、光を**反射**する。
- 通常の物体は散乱する。
  - 散乱光はユークリッドが記述したとおり、どの方向にも等しく光を分ける。



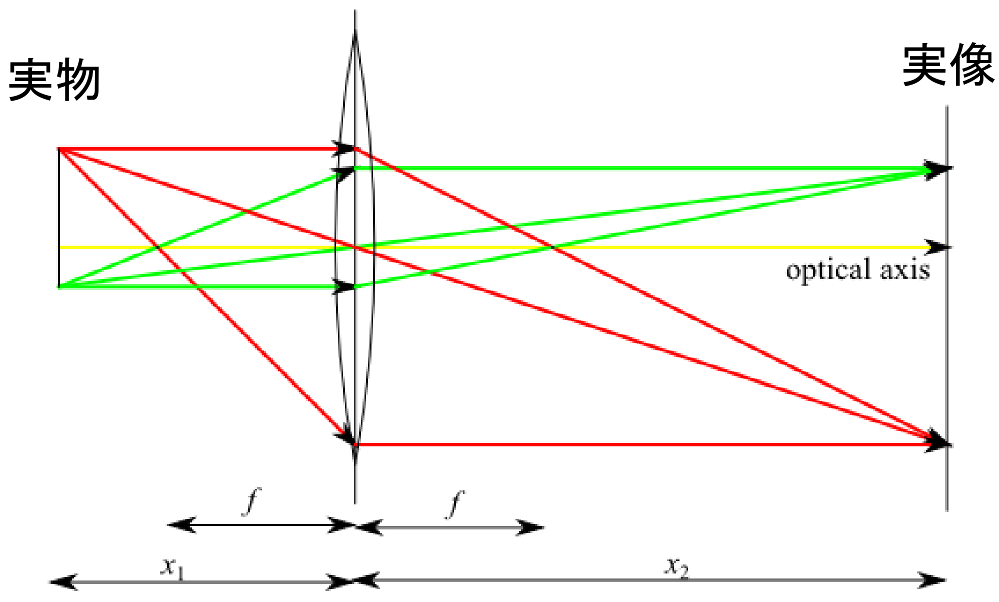
像

- カメラの原理
  - 光は直進し、ピンホールを通り、スクリーンに当たる
  - スクリーンに当たる光はこの直線上の点から発したもののみ
  - スクリーンはその光を散乱し、散乱光が目に入ると、そこに物体があったように見える。



レンズと像

- レンズの原理
  - 光軸(レンズの中心からレンズ面に垂直な直線)に平行に入った光はすべて焦点に入る。
  - レンズ中心を通る光は直進する。
  - 焦点を通ってレンズ面に入った光は、光軸に平行に直進する。

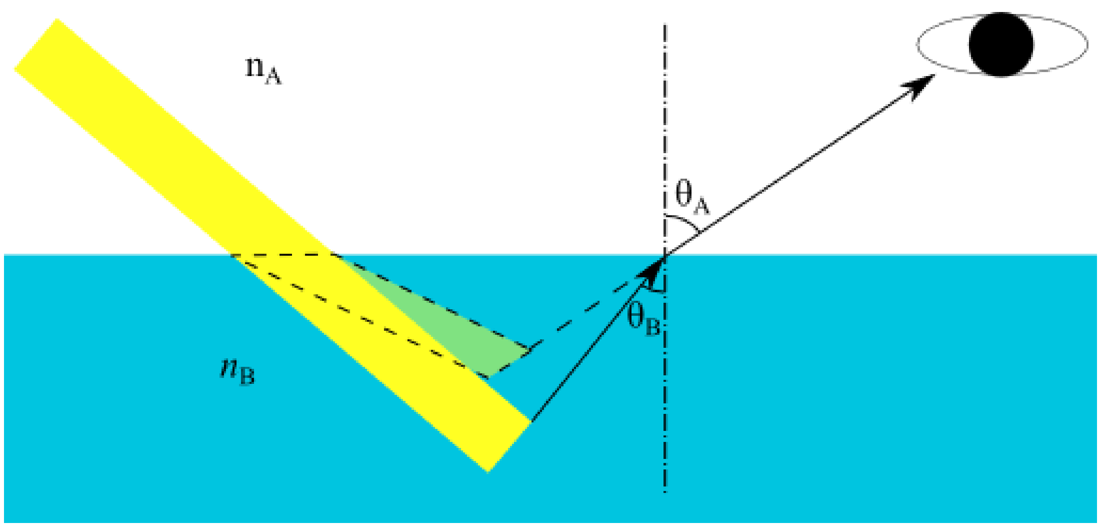


$$\begin{cases} \frac{x_1 - f}{a} = \frac{f}{b} \\ \frac{f}{a} = \frac{x_2 - f}{b} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 - f)(x_2 - f)}{f} &= f \\ x_1 x_2 - f(x_1 + x_2) + f^2 &= f^2 \\ f(x_1 + x_2) &= x_1 x_2 \\ \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{f} \end{aligned}$$

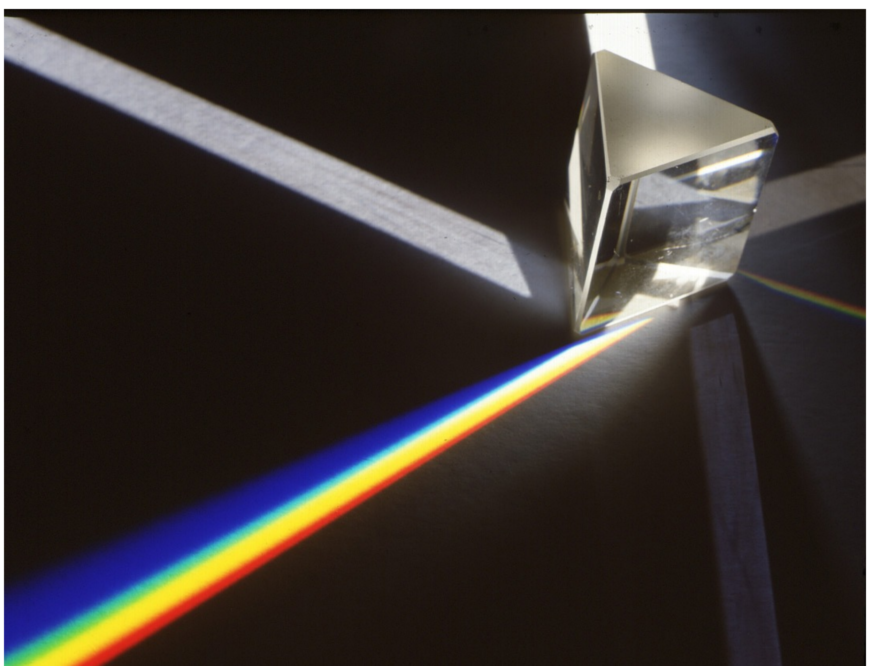
屈折（スネルの法則）と フェルマーの原理

- スネルの法則
  - $n_\mathrm{A} \sin\theta_\mathrm{A} = n_\mathrm{B} \sin\theta_\mathrm{B}$
- フェルマーの原理
  - 光は光学的距離が最短になる経路、すなわち進むのにかかる時間が最小になる経路を通る。
  - 水平方向の光学的距離がn_B倍長くなるので、虚像は境界方向に$1/n_\mathrm{B}$ の長さになる。



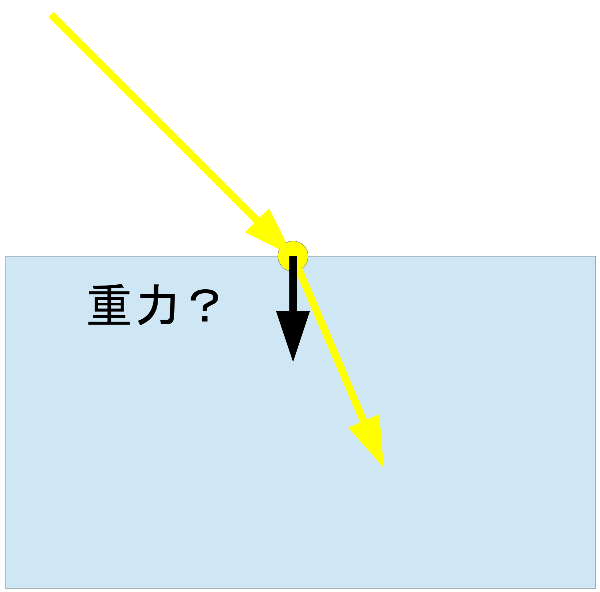
分光

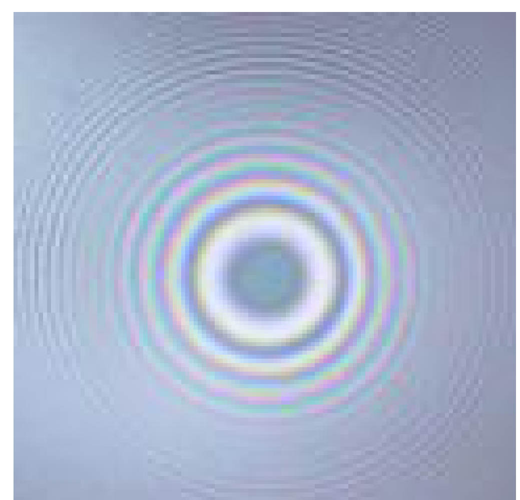
- ニュートンは、三角形の透明なガラスや結晶（プリズム）を通る光が、いろいろな色に分かれることを発見した。（Spectra スペクトル）
- ニュートンは光は色により7種類あるとした。（誤り）



線・粒子？

- ニュートンは光は質量を持った粒子であると考えた。
- しかし、レンズを光学平板に乗っけると現れるリング状縞模様（ニュートンリング）を説明できず、「狭い隙間で発生する光の病気」と呼んだ。

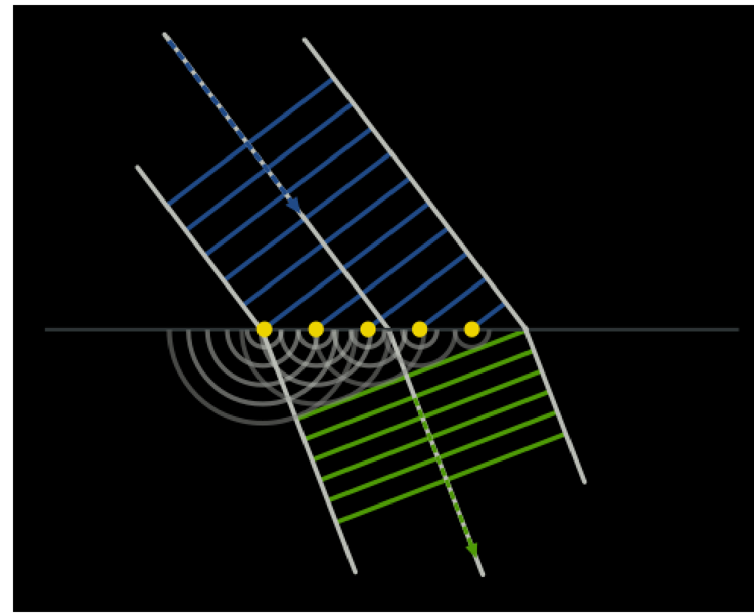


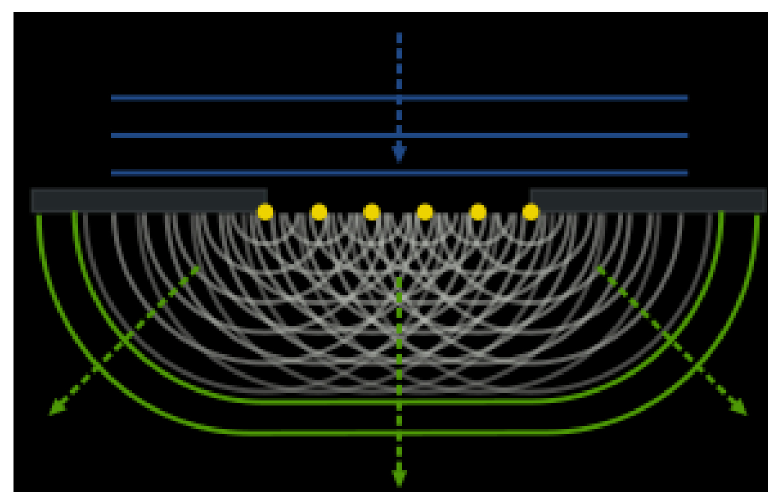


ニュートンリング

波動と回折

- ホイヘンスは光は波であるという仮説を立て、光の直進、屈折と回折を説明しようとした。
  - 波面から、小波面が単位時間に距離vだけ全方向に進む。
  - 小波面が重なる場所が、新しい波面。
  - 屈折率nの場所は、v'=v/nになる。
- しかし、「**干渉**」という考えに至らなかったので、説明し切れていない。

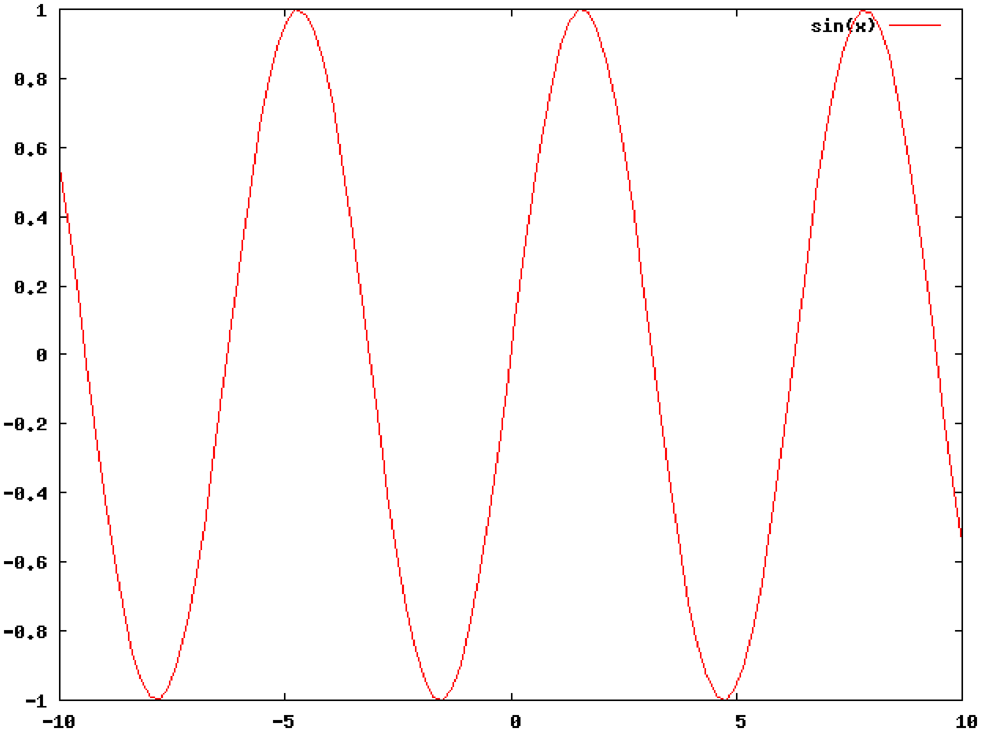




ところで波って何だっけ

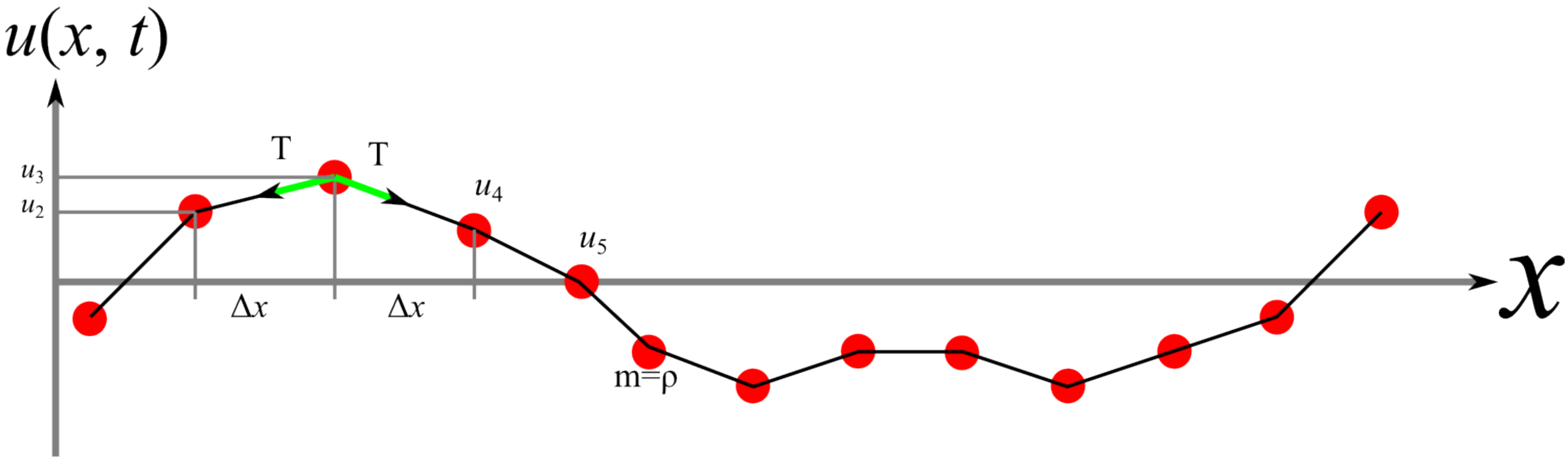
- ホイヘンスがいったものは、波っぽくない

元祖 波



正弦波

弦楽の原理



$$
\begin{aligned}
F_u =& T\frac{u_{i-1}-u_i}{\sqrt{(\Delta x)^2+(u_{i-1}-u_i)^2}} + T\frac{u_{i+1}-u_i}{\sqrt{(\Delta x)^2+(u_{i+1}-u_i)^2}} \qquad (i=1,2,3,\cdots,N) \\
\simeq& T\frac{u_{i-1}-u_i}{\Delta x} + T\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{M}{N}\frac{d^2}{dt^2}u_i = T\left\{\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - \frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}\right\}
$$

波動方程式

- よって残る変位 u_i のみについて解くと。一次元の場合、

$$\frac{M}{N}\frac{d^2}{dt^2}u_i = T\left\{\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}\right\}$$

$$\frac{M\Delta x}{L}\frac{d^2}{dt^2}u_i = T\left\{\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}\right\}$$

$$\frac{M}{L}\frac{d^2}{dt^2}u_i = T\frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - \frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0 \quad M/L = \rho_l$$

$$\rho_l(x)\frac{d^2}{dt^2}u(x) = T\frac{d^2}{dx^2}u(x)$$

波動方程式 (wave equation)

$$\rho_l = \rho S \quad T = ESl$$

$$\rho(x)\frac{d^2}{dt^2}u(x) = El\frac{d^2}{dx^2}u(x)$$

ρ_l: 線密度
ρ: 密度
S: 断面積
E: 縦弾性係数 (ヤング率)
l: 長さ

波動

$$\rho_l(x)\frac{d^2}{dt^2}u(x) = T\frac{d^2}{dx^2}u(x)$$

- この方程式の解は、境界がない場合の一般解は下記のようになる。

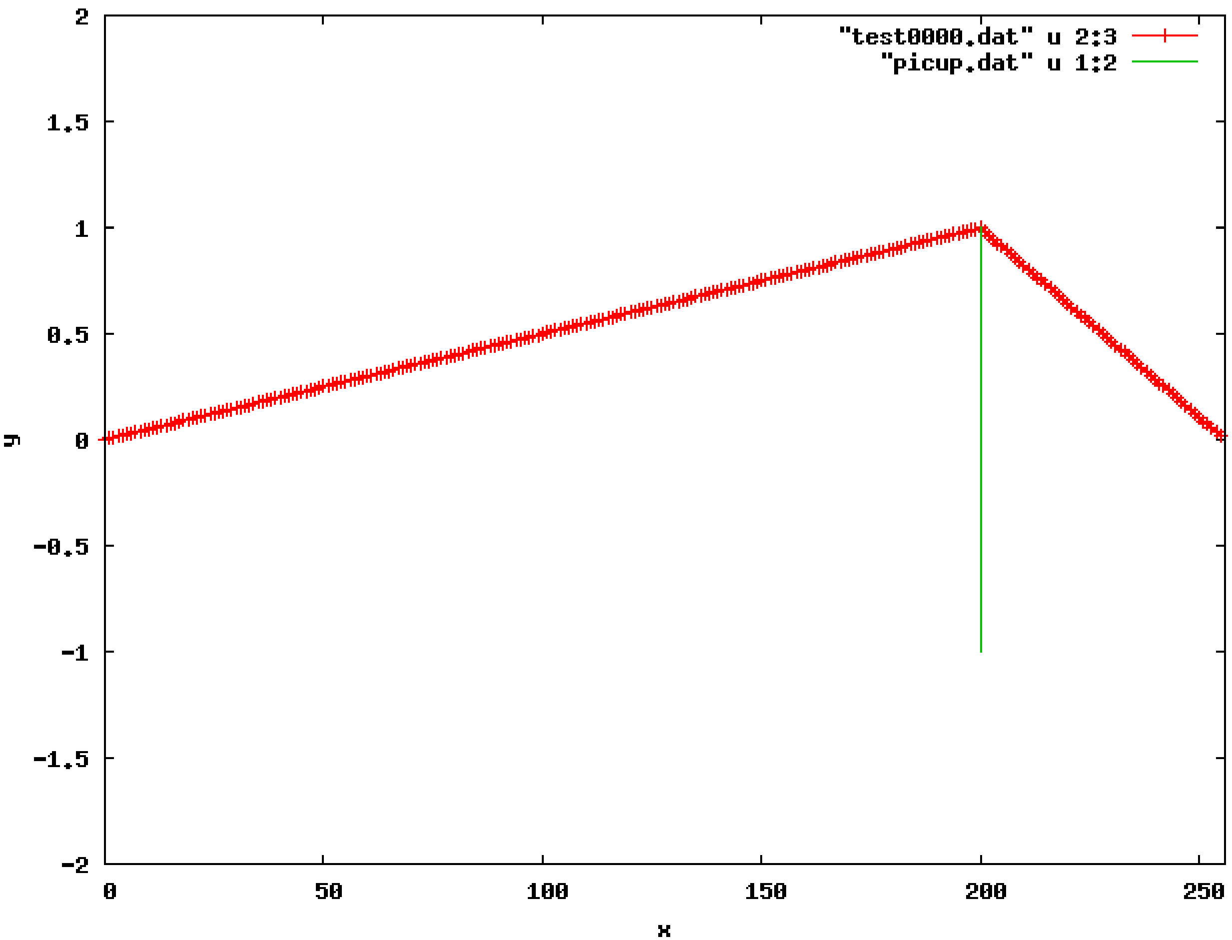
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathbf{f}(x-vt) + \mathbf{g}(x+vt) \\ &= \mathbf{f}\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right) + \mathbf{g}\left(-\frac{x}{\lambda} - ft\right) \\ &= \mathbf{f}(kx-\omega t) + \mathbf{g}(-kx-\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} = \lambda f \\ k &= 2\pi/\lambda \\ \omega &= 2\pi f \end{aligned}$$

v: 波速 (空気中音速 340 m/s, 真空光速 c = 299 792 458 m / s)
λ: 波長 (m)　　f: 周波数 (Hz = 1/s)
k: 波数 (rad / m)　　ω: 角周波数 (rad / s)

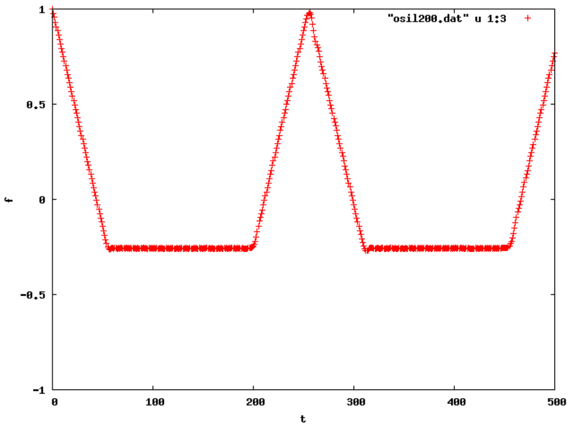
実際はどのように動くか

- ギター弦のシミュレーション

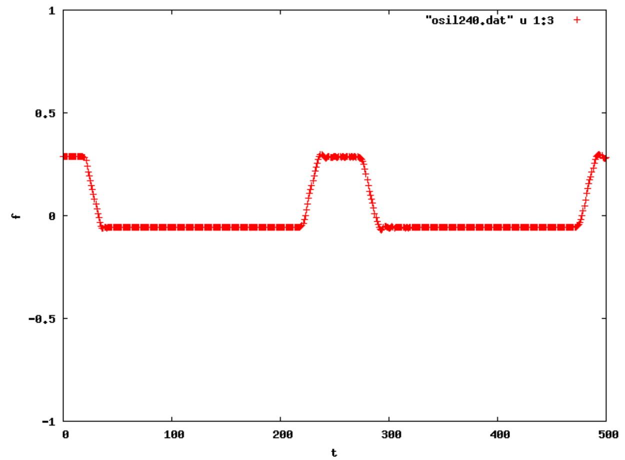


$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{f}(x - vt) + \mathbf{g}(x + vt)$$

周期 (1/f)

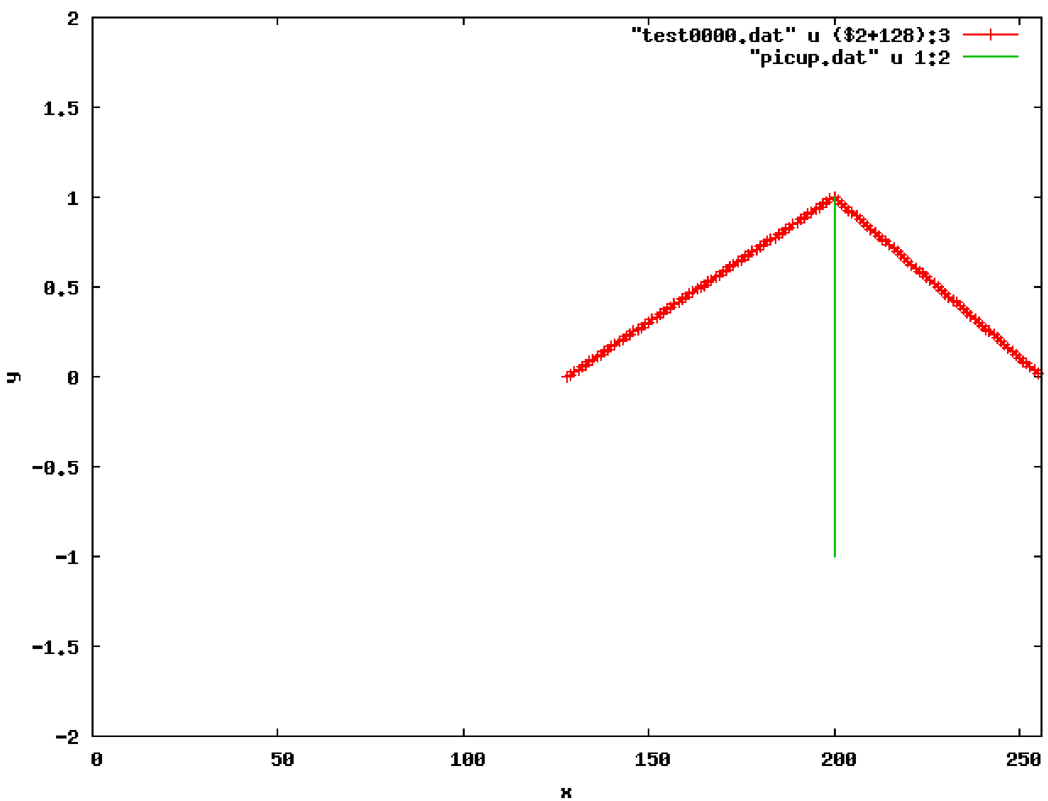


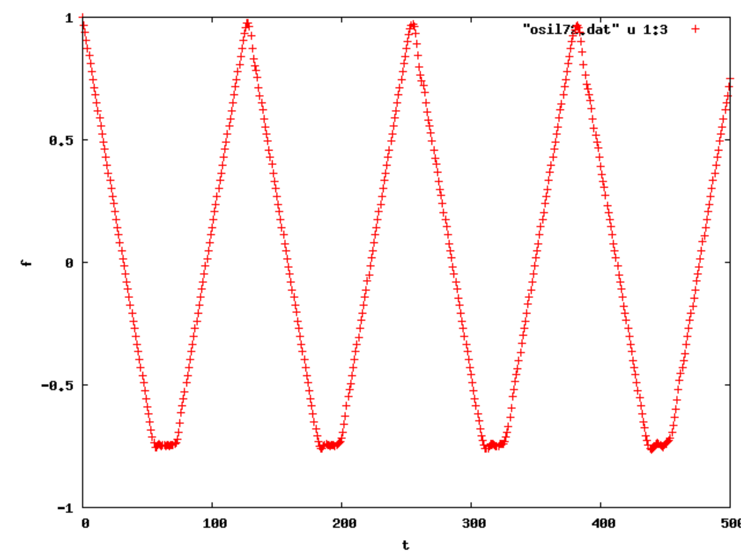
x=200

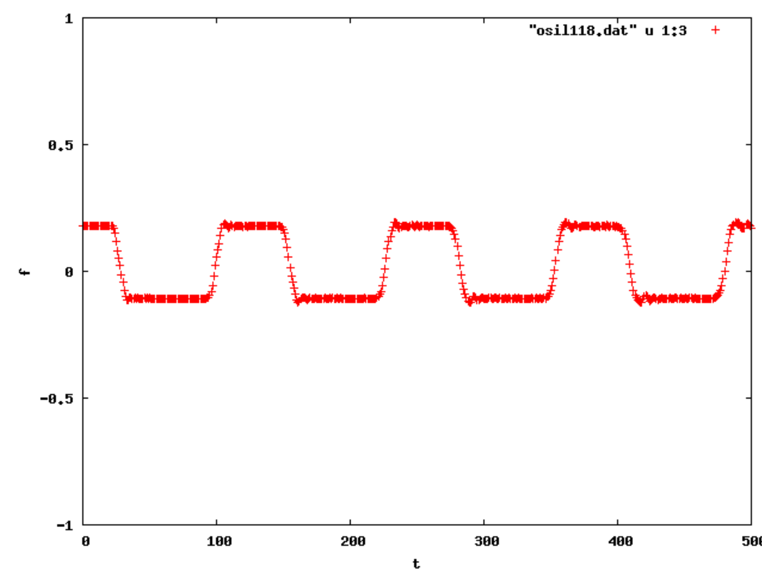


x=240

弦が半分の長さになったら

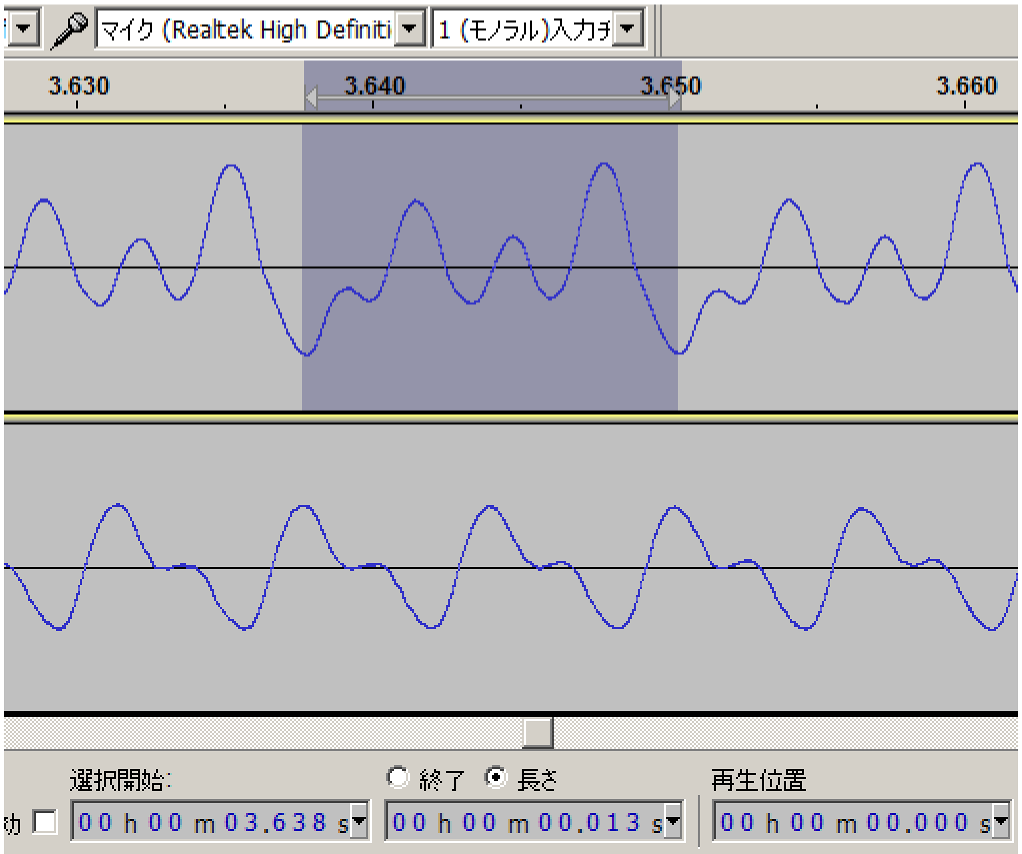


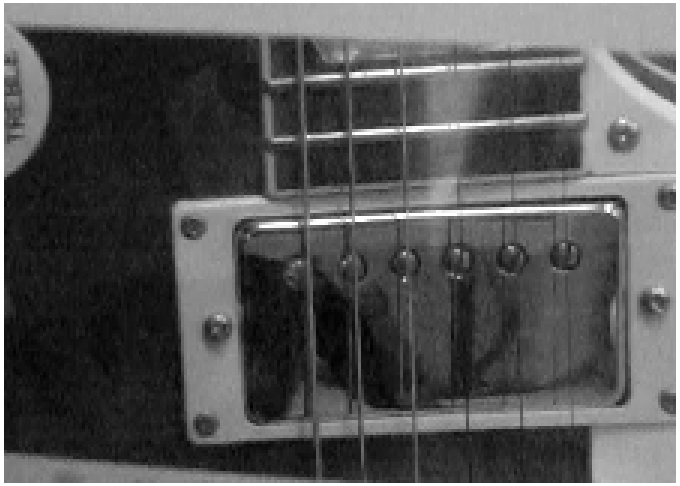




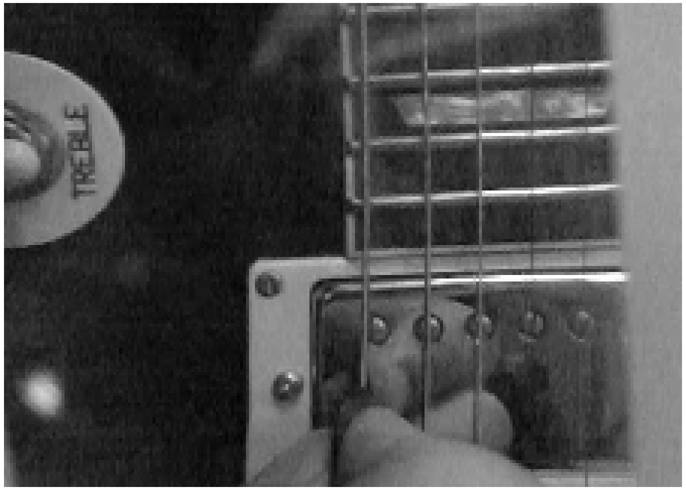
$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{f}(x - vt) + \mathbf{g}(x + vt)$$

まあ、実験してみよう





E1 open (165 Hz) 0.03 倍速 (30 fps)



E2 (12 flet 330 Hz) 0.03 倍速 (30 fps)

- Audacity (http://audacity.sourceforge.net/)

基準振動モード

- 解を変数分離して、特殊解をすべて与えてみる。
-
- 境界条件（今回は「長さＬしかない」）があると、とりえるモードに制限ができる。

$$\rho_l(x)\frac{d^2}{dt^2}u(x) = T\frac{d^2}{dx^2}u(x)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)\tau_n(t)$$

$$\rho\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)\frac{d^2}{dt^2}\tau_n(t) = T\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n(t)\frac{d^2}{dx^2}X_n(x)$$

$$X_n(x) = A_n\sin\left(2\pi n\frac{x}{L}+\alpha_n\right)$$

$$\tau_n(t) = \sin(-\omega_n t)$$

$$-\rho\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\omega_n^2 A_n\sin\left(2\pi n\frac{x}{L}+\alpha_n\right)\sin(-\omega_n t)\right\}$$

$$= -T\sum_{n=0}^{\infty}\left\{4\pi^2\frac{n^2}{L^2}A_n\sin\left(2\pi n\frac{x}{L}+\alpha_n\right)\sin(-\omega_n t)\right\}$$

色 (Spectra)

$$\omega_n^2 = 4\pi^2 \frac{n^2}{L^2} \frac{T}{\rho} \qquad \omega_n = \pm\, 2\pi \frac{n}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad u(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x + \alpha_n) \sin(-\omega t)$$

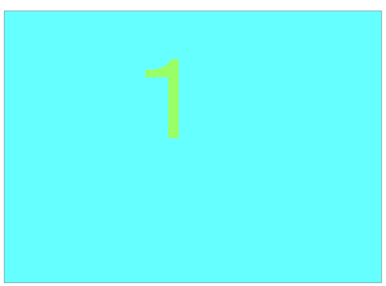
$$k_n = 2\pi \frac{n}{L} = 2\pi/\lambda$$

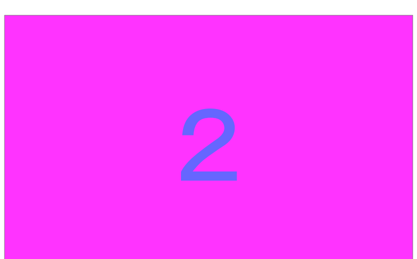
$$f = \frac{n}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \lambda = \frac{L}{n}$$

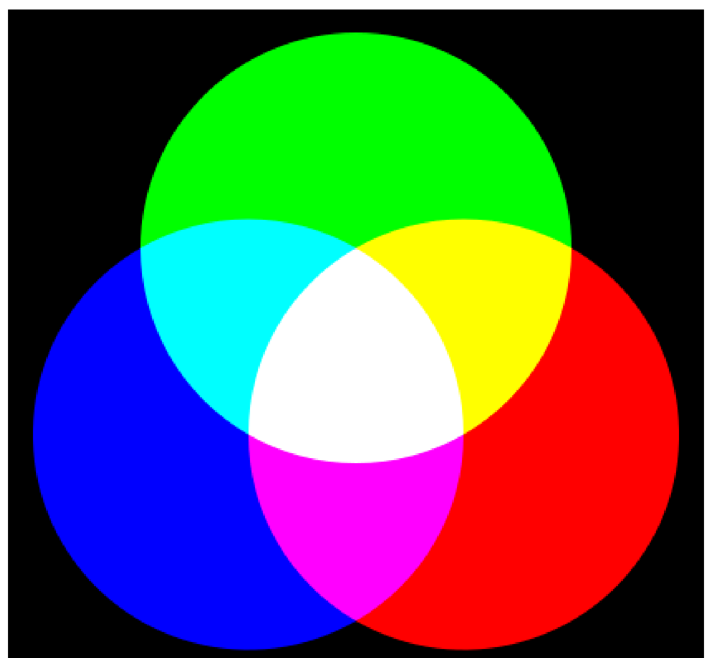
- 要するに任意波形は幾つかの基準モードの足し合わせになっているということ。
-
-
-
-
- 基準モード → 光の色　　振幅 → その色の強さ

色の三原色

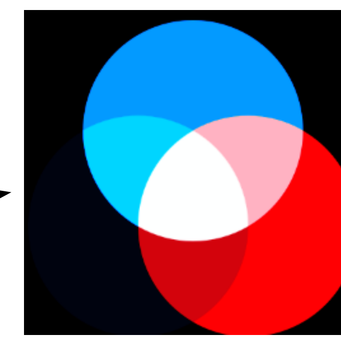
- 色はニュートンによって、白色から分けられることが知られていたが、正体は不明瞭だった。
- トーマス･ヤングは、医者としての研究で、色覚異常の研究をしていて、人間は色を3種類だけ区別することを発見した。(色の三原色)



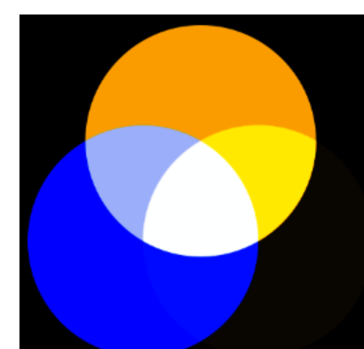




青が
見えない人

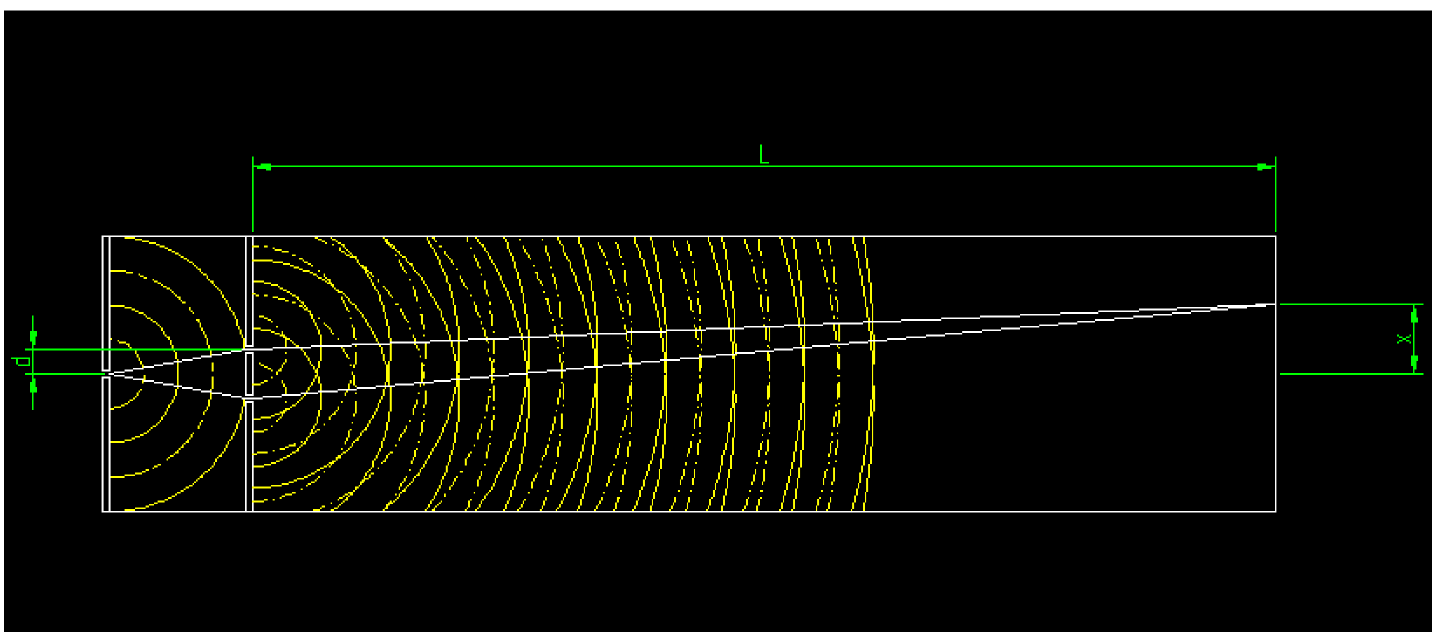


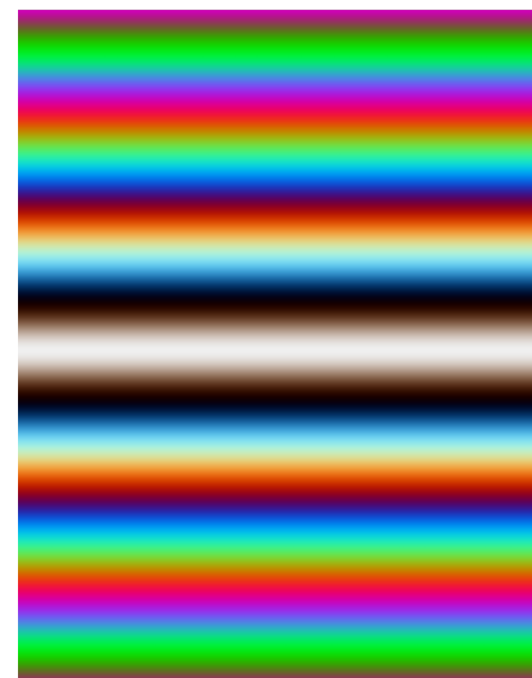
赤が
見えない人



ヤングの干渉実験

- 弾性体の波動方程式に出てきたヤングは、弾性体の波（音波）と同様に光が波で干渉すると考え、回折波の干渉実験を行う。



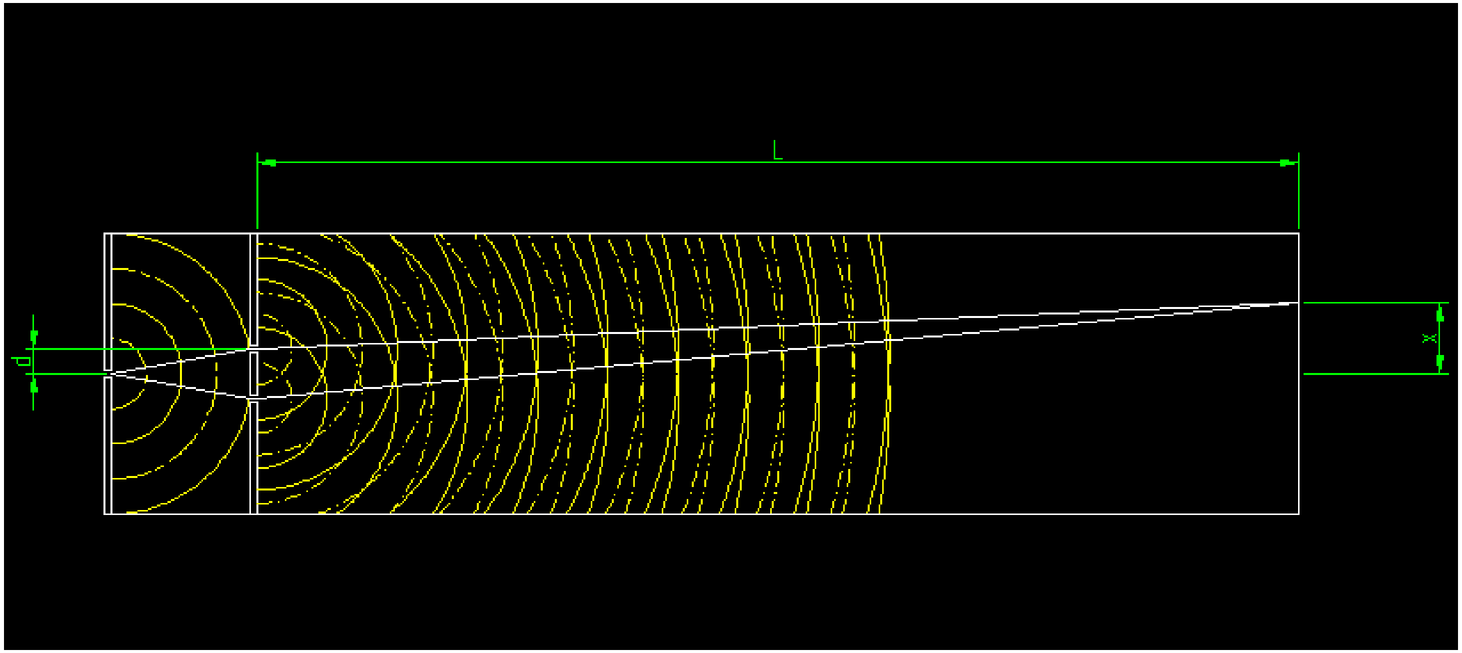


ヤング干渉計

- 光強度

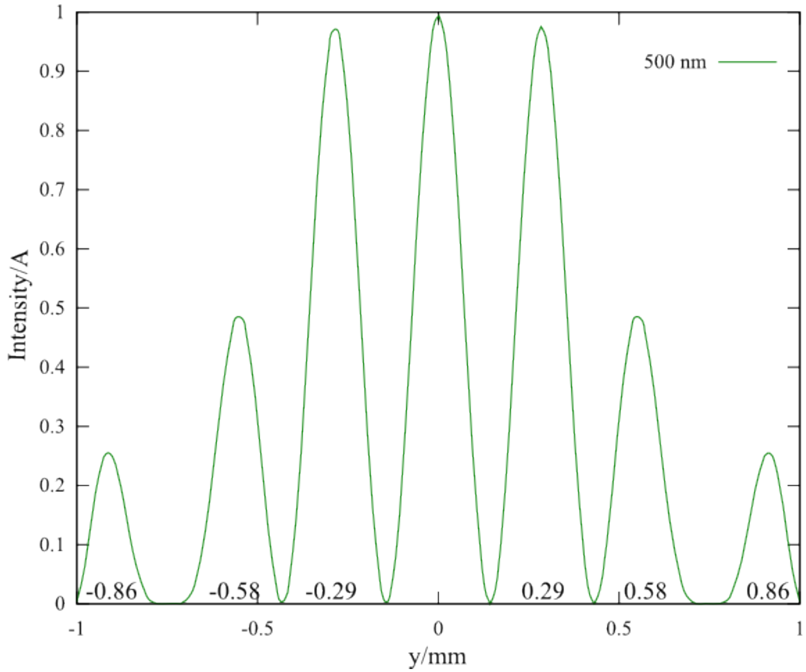
$$
\begin{aligned}
I(x,t) =& A\sin\left(2\pi\frac{\sqrt{L^2+(x-d)^2}}{\lambda}\right)\sin(\omega t) + A\sin\left(2\pi\frac{\sqrt{L^2+(x+d)^2}}{\lambda}\right)\sin(\omega t) \\
=& 2A\sin\left(\pi\frac{\sqrt{L^2+(x-d)^2}+\sqrt{L^2+(x+d)^2}}{\lambda}\right)\cos\left(\pi\frac{\sqrt{L^2+(x-d)^2}-\sqrt{L^2+(x+d)^2}}{\lambda}\right)\sin(\omega t) \\
=& 2A\sin\left(\pi\frac{\sqrt{L^2+(x-d)^2}+\sqrt{L^2+(x+d)^2}}{\lambda}\right)\cos\left(\pi\frac{\Delta l}{\lambda}\right)\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

- 光路差 : Δl が大事



光路差

$$
\begin{aligned}
\Delta l =& \left|\sqrt{L^2+(x-d)^2}-\sqrt{L^2+(x+d)^2}\right| \\
=& L\left|\sqrt{1+\frac{(x-d)^2}{L^2}}-\sqrt{1+\frac{(x+d)^2}{L^2}}\right| \\
\simeq& L\left|1+\frac{1}{2}\frac{(x-d)^2}{L^2}-1-\frac{1}{2}\frac{(x+d)^2}{L^2}\right| \\
=& L\left|\frac{1}{2}\frac{(x-d)^2-(x+d)^2}{L^2}\right| \\
=& \frac{2d}{L}|x|
\end{aligned}
$$



光強度
L=2.3 m, d=2 mm
λ=0.5 µm
Lλ/2d=0.2875 mm

- 明線:

$$
\begin{aligned}
\Delta l =& n\lambda \quad (n \in N) \\
|x| =& n\frac{L\lambda}{2d}
\end{aligned}
$$

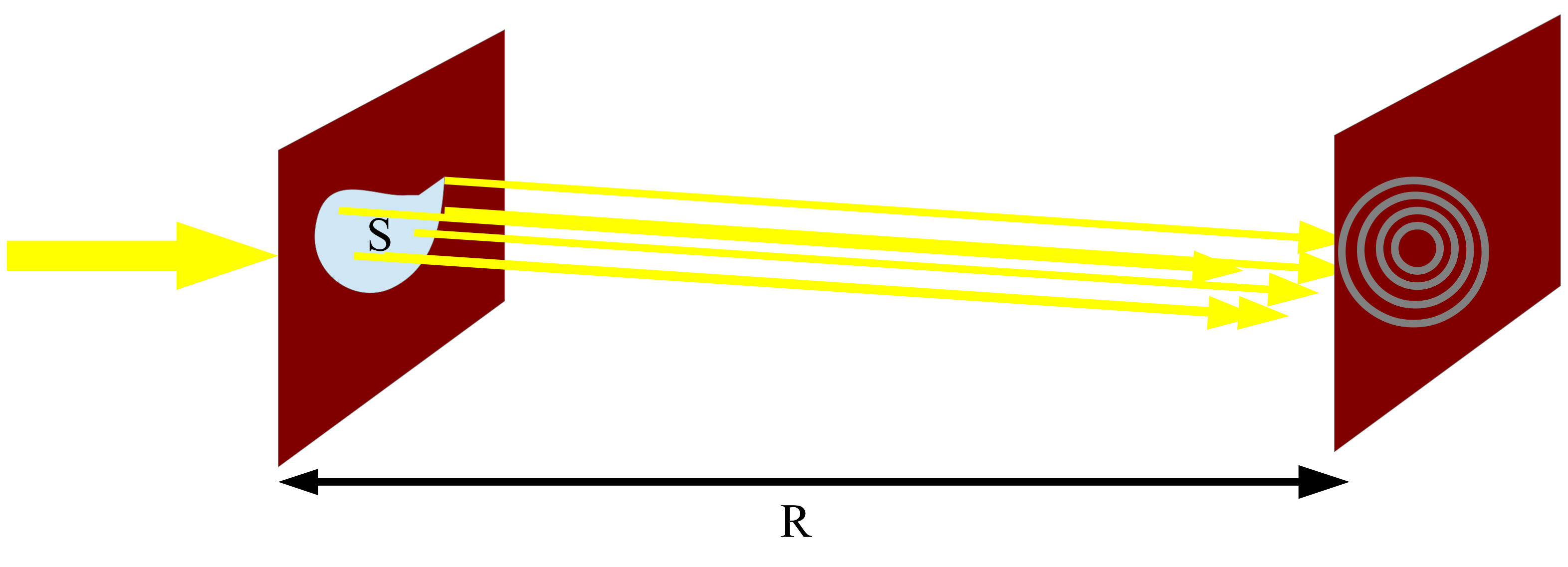
- 暗線:

$$
\begin{aligned}
\Delta l =& \frac{2n+1}{2}\lambda \quad (n \in N) \\
|x| =& (2n+1)\frac{L\lambda}{4d}
\end{aligned}
$$

フレネル回折

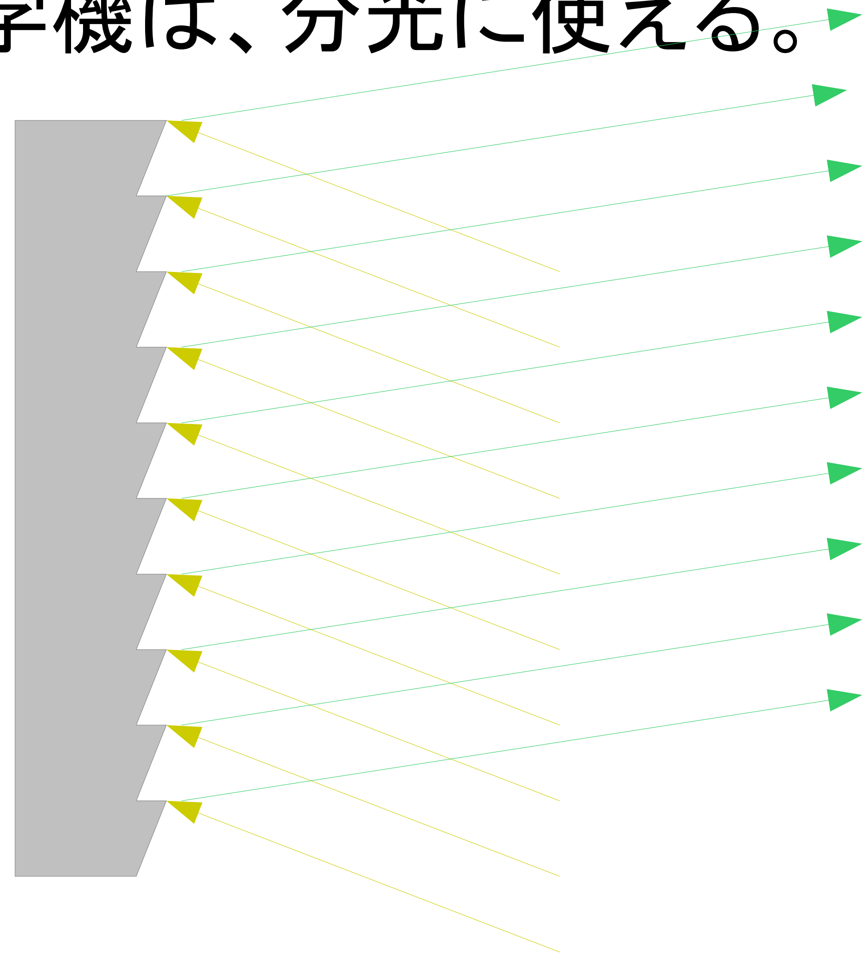
- フレネルは小さい穴を通った光の回折が、穴の部分を通ったすべての光の重ね合わせで表せることを示した。

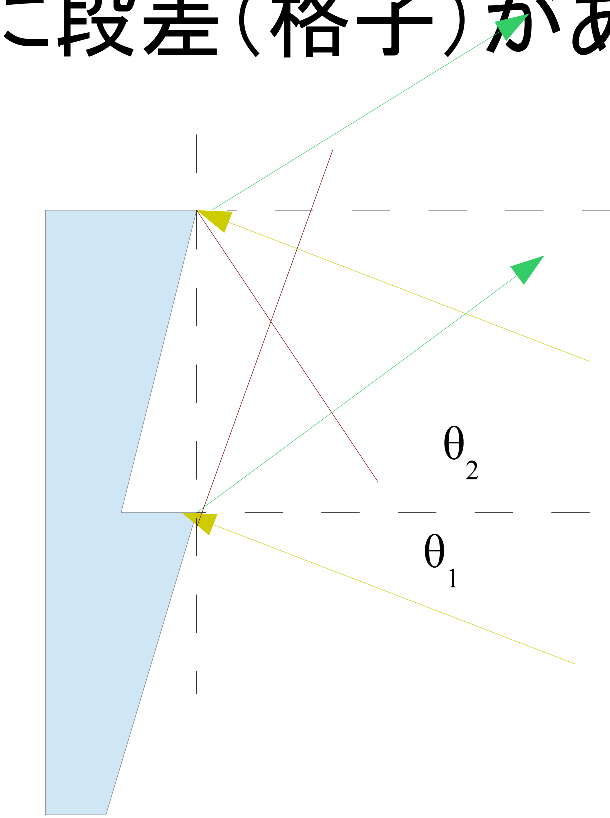
$$u(x,y) = \frac{A}{\lambda} \iint_S \frac{1}{R} \sin\left(2\pi \frac{\sqrt{R^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}}{\lambda}\right) dx'\, dy'$$



回折格子

- フレネルレンズのように等間隔に段差（格子）がある光学機は、分光に使える。





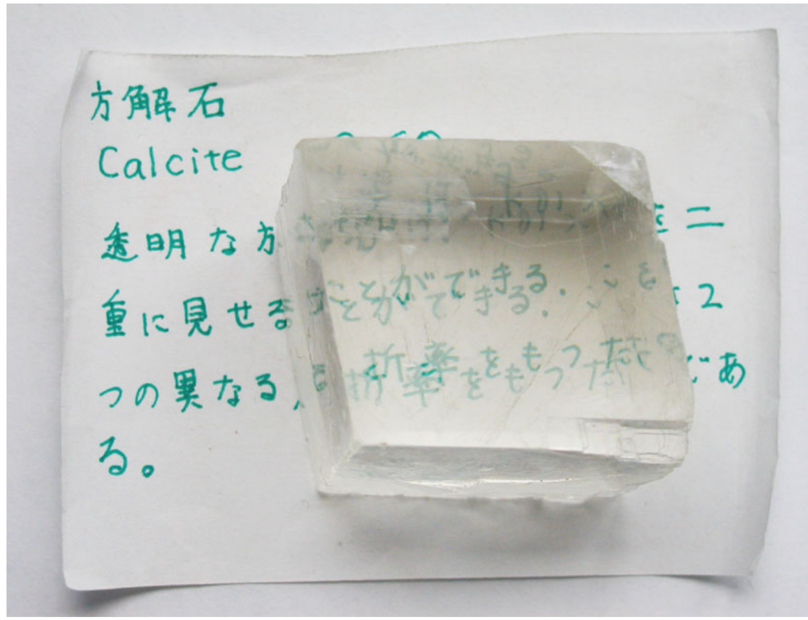
$$\Delta l = n\lambda$$

$$\Delta l = |d \sin\theta_1 - d\sin\theta_2|$$

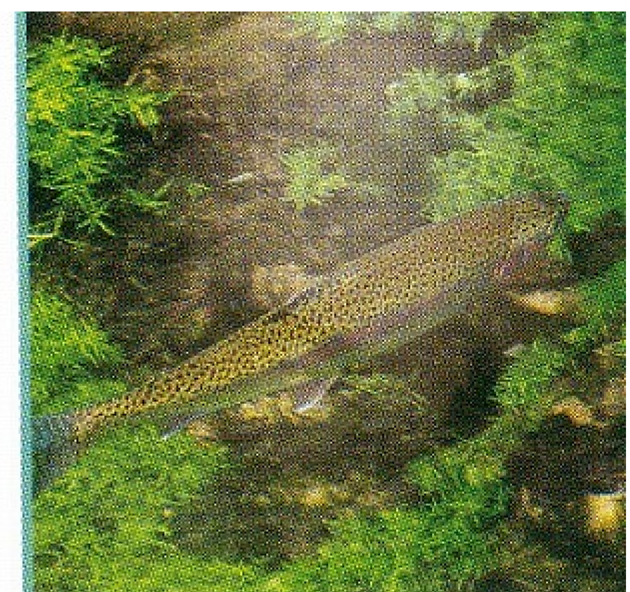
$$\sin\theta_2 = \sin\theta_1 \pm \frac{n\lambda}{d}$$

光は何を伝わる波？(偏光)

- 複屈折



- 偏光反射

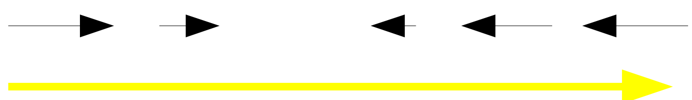


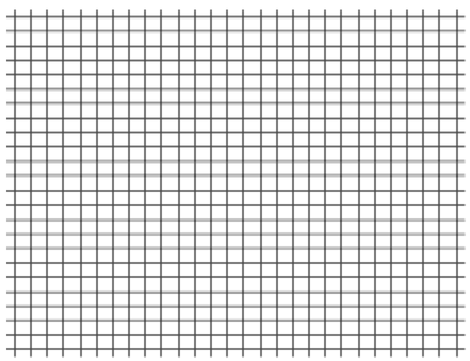
縦波と横波

- 音波は縦波・縦波の全3モードがある。
- 光波は横波の2モードのみ。

縦波

$$\rho(\mathbf{x})\frac{d^2}{dt^2}\Delta\mathbf{x}(\mathbf{x}) = A\begin{pmatrix}\frac{d^2}{dx^2}\Delta x\\ \frac{d^2}{dy^2}\Delta y\\ \frac{d^2}{dz^2}\Delta z\end{pmatrix}$$





横波

$$\rho(x)\frac{d^2}{dt^2}\Delta y(x) = \epsilon\frac{d^2}{dx^2}\Delta y(x)$$