人口の増え方（テキスト p110）

「人口の増え方」をシミュレーションできるようにモデル化し，数式で表すことを考えよう．人口増加を考える場合，人口増加率だけあれば計算できる．人口増加率は出生率と死亡率・転出率・転入率などの合計でもある．ここでは簡単のために死亡率は無視して，人口増加率のみを考える．

人口増加率（%）＝（当該時点の人口－前時点の人口）÷前時点の人口×100

人口増加率は定数ではなく，一人あたりの食糧などに関係する瞬間値であるが，最初に，人口増加率が一定という最もシンプルなモデルで人口増加を計算し，その後，人口増加率が変化するというモデルのプログラミングを行う．

モデル化①（人口増加率一定）

人口が一定の A%/年で増えるとすると，T+1 年の人口 N_{T+1} は T 年の人口 N_T を使って次のように表される．

$$N_{T+1} = N_T + \left(\frac{A}{100}\right) \times N_T = \left(1 + \frac{A}{100}\right) \times N_T \qquad (1)$$

[演習問題 1]

現在の人口が 100 万人であるとして，1 年に 5%ずつ人口が増えるとすると（人口増加率 5%），50 年後にはどのくらいに増えているか？図 1 人口増加ワークシートのようなワークシートに1年ごとに計算して５年ごとの計算結果を出力して図２のようなグラフを作成しなさい．

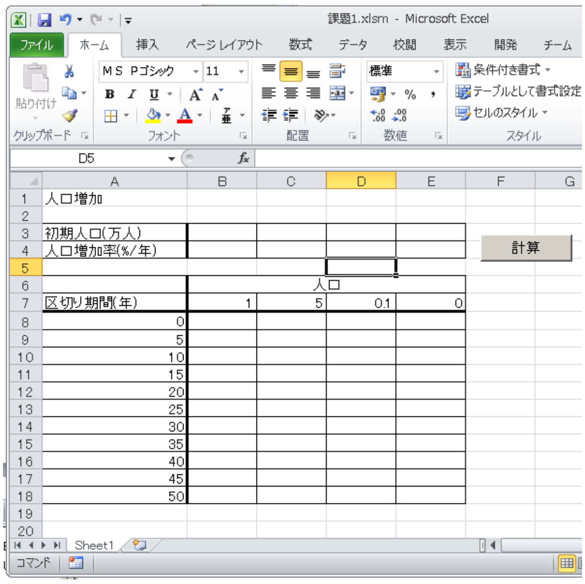

図 1 人口増加ワークシート

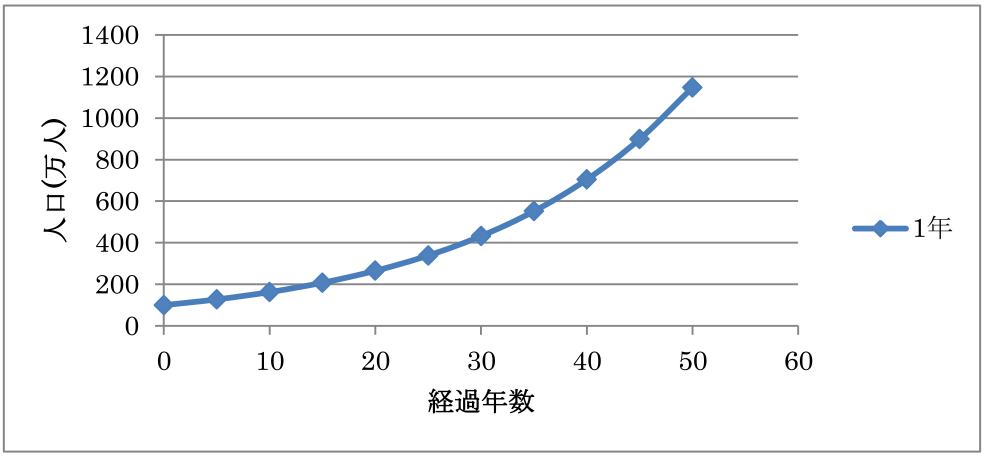

図 2 人口増加のグラフ

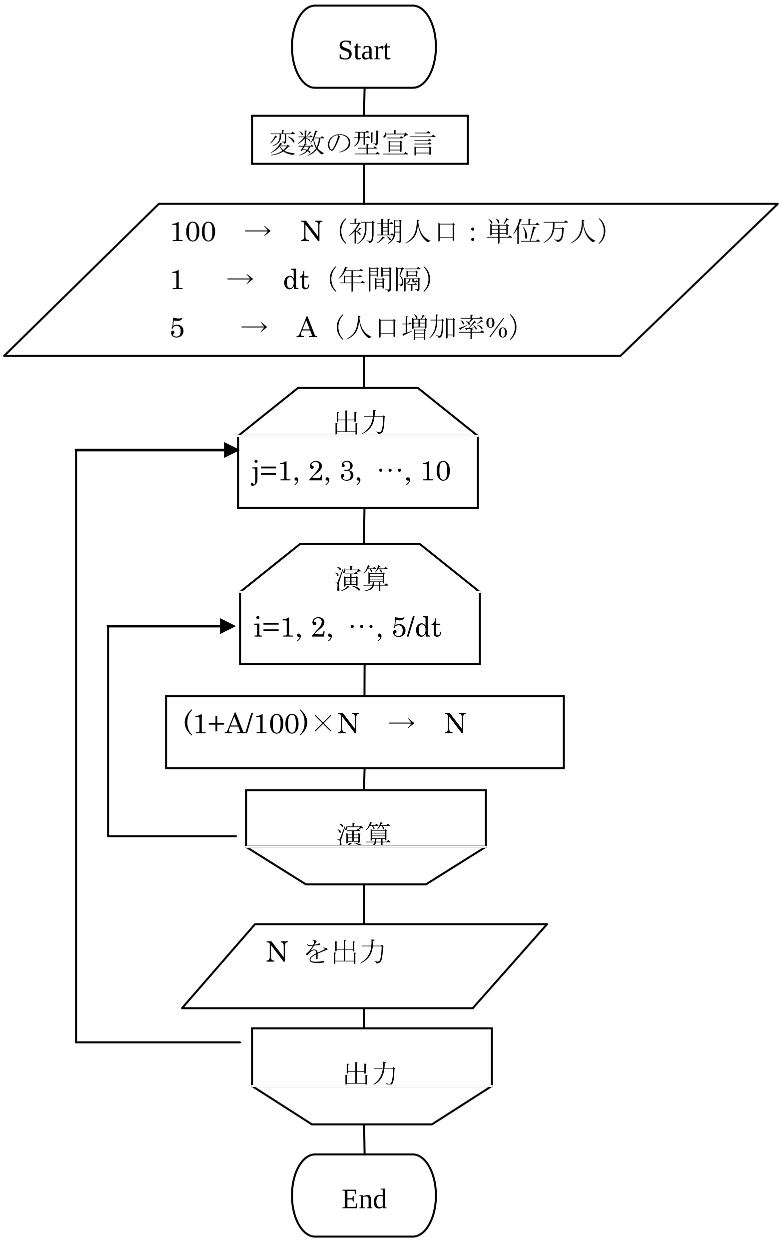

図 3　フローチャート

連続化

国勢調査は５年に一度しか行われないが，それによる人口の年平均増加率は

人口の年平均増加率 ＝((当期人口/前期人口)^(1/5)-1)×100

と計算される．これは T+5 年の人口 N_{T+5} は T 年の人口 N_T を使って，

$$
\begin{aligned}
N_{T+5} &= (1 + A/100) N_{T+4} \\
&= (1 + A/100)^2 N_{T+3} \\
&= (1 + A/100)^5 N_T
\end{aligned}
\tag{2}
$$

のように表されるためで，厳密に$A = \left(\left(\frac{N_{T+5}}{N_T}\right)^{1/5} - 1\right) \times 100$　である．また，この式(2)は整数年ごとに成り立つわけではなく，もっと細かい期間でも成り立つはずである．一般的な期間をΔtと置くと，

$$N_{T+\Delta t} = \left(1 + \frac{A}{100}\right)^{\Delta t} N_T \tag{3}$$

となる．

[演習問題 2]　数式(3)が一般的に成り立つことを確認するために，先のワークシートで，５年,0.1 年間隔で数式(3)を使用しシミュレーションを行う．また，Δt=0 にすると，このシミュレーションではできないが，Δt → T, T → 0 と代入すれば，　$N_T = \left(1 + \frac{A}{100}\right)^T N_0$　なので，これをワークシート上で解いて比較する．

時間依存するモデル

これまでの式は，人口増加率が定数であったから厳密に解けるが，実際の生物の個体数（人口）は，まわりの環境（食料など）などによりある程度以上は増えない．次は年間に生産される食糧を定数 F(人分/年)として，　人口増加率を $A(N)$という人口の関数にする.数式(3)は,

$$N_{T+\Delta t} = \left(1 + \frac{A(N_T)}{100}\right)^{\Delta t} N_T \tag{4}$$

となり，これを解けばいい．今度は一般化することができず，　非常にΔt が大きいと誤差がひどくなることが予想される．

[演習問題 3]

$A(N) = 10\left(1 - \frac{N_T}{F}\right)$, F=200 として，数式(4)を計算間隔 5 年,1 年,0.2 年,0.04 年で行いグラフを５年ごとの人口のグラフ書け．また，50 年後の数値を 0.04 年から差し引いた誤差見積りつくり，横軸に計算間隔，縦軸に誤差見積りを示したグラフ(図　4)を書け．

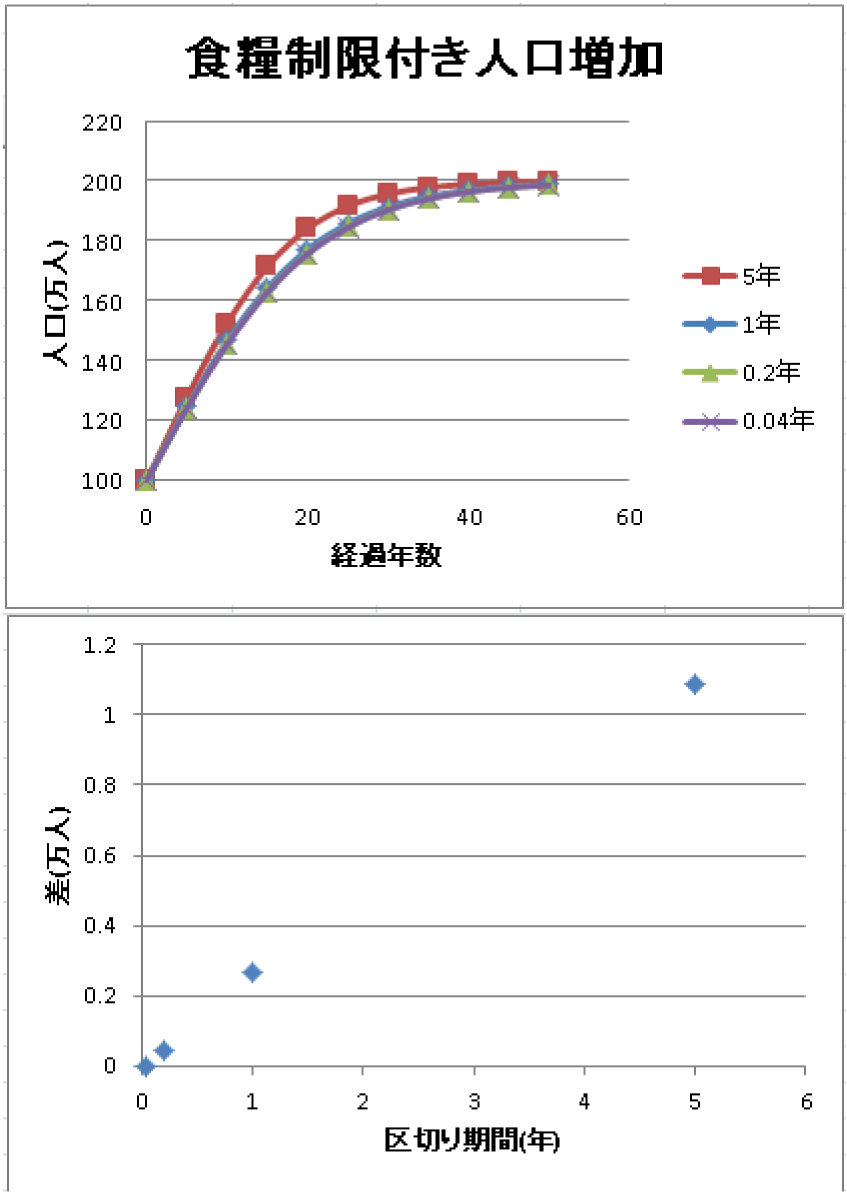

図 4: 食糧制限付き人口増加と区切り区間の違いによる誤差

被食者・捕食者 (Lotka-Volterra 方程式) (参考: テキスト p121)

微分方程式と Euler 法

前回人口増加率を使って，個体数の増減を計算したが，もっと一般的なモデルには，通常は微分方程式を使う．まずは，前回の増加率の式と微分方程式が同等であることを示す:

$$\frac{dN}{dt}(t) = \frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{A(N_T)}{100}\right)^{\Delta t} - 1}{\Delta t} N_t$$

$$= \frac{\Delta t \ln\left(1+\frac{A(N_t)}{100}\right) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ln^2\left(1+\frac{A(N_t)}{100}\right) + \cdots}{\Delta t} N_t$$

よって，$\Delta t \rightarrow 0$ で

$$\frac{dN}{dt} = \ln\left(1+\frac{A(N_t)}{100}\right) \mathrm{N_t} \tag{5}$$

と同等である．この関数 $A(N)$は，$\mathrm{N_t}$ の係数であるから，個々の人口の数に対して，１年に平均して $A(N)/100$ 人の増えるという意味で，増加率の定義そのままである．流入・流出などを考える場合，現人口と関係ないので，これに N と独立な関数を足せば，そのようなモデルができる．ここでは，そのような微分方程式をもっと一般化して，

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{6}$$

とする．Euler 法は非常に単純な解法で，$\mathrm{dx} \rightarrow \mathrm{x}_{t+\Delta t}\text{-}\mathrm{x}_t$, $\mathrm{dt} \rightarrow \Delta t$ として，

$$\mathbf{x}_{\mathrm{t+\Delta t}} = \mathbf{x}_t + \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, t)\Delta t \tag{7}$$

として解いていく．

[演習問題 4]

式(5)を前回と同じ，食糧制限付き人口増加率 $\mathrm{A(N_t)}$で解け．計算間隔は 1,0.5.0.25 年とする．また，50 年後の人口差から誤差を見積もれ．(ln(x)は $\log_e$(x)のことで、Excell,VB では log(x))

修正 Euler 法・Runge-Kutta 法

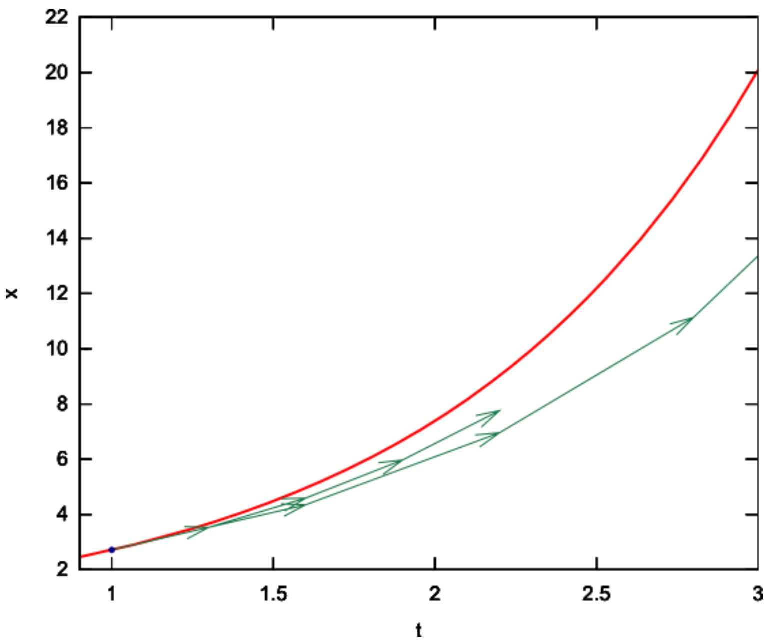

図 5 真の解(赤)と Euler 法 (緑)

この方法は単純ながら，誤差はΔtの１乗に比例して大きい．(図 5)もっと精度よく計算する方法は，$x(t+\Delta t)$の Taylor 展開から考える:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}=\mathbf{x}_t+\frac{d\mathbf{x}}{dt}\Delta \mathrm{t}+\frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(\Delta t)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\Delta t)^k}{k!}\frac{d^k\mathbf{x}}{dt^k}$$

$$=\mathbf{x}_t+\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,t)\Delta t+\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{f}}{dt}(\mathbf{x}_t,t)(\Delta t)^2+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\Delta t)^k}{k!}\frac{d^k\mathbf{x}}{dt^k} \tag{8}$$

2 項目までは Euler 法と同じで，Euler 法で誤差となるのは 3 項目である．そこで，3 項目も計算するともう少し精度が上がる．そこで，修正 Euler 法では 3 項目を計算する. $d^2\mathbf{x}/dt^2$ は

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt}\cong\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{t+\Delta t},t+\Delta t)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,t)}{\Delta t}$$

$$\approx\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_t+\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,t)\Delta t,t+\Delta t)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,t)}{\Delta t} \tag{9}$$

となる．この微分を計算するのにも $t+\Delta t$ の $\mathbf{x}$ を計算する必要があるのだが，そこは Euler 法で導いておく．これを代入すると式(8)は,

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}=\mathbf{x}_t+\frac{\Delta t}{2}\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,t)+\mathbf{f}(\mathbf{x}_t+\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,t)\Delta t,t+\Delta t)\} \tag{10}$$

となる．実際の計算は，3 段階に分け,

$$\mathbf{k}_1=\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,t),$$
$$\mathbf{k}_2=\mathbf{f}(\mathbf{x}_t+\mathbf{k}_1\Delta t,t+\Delta t),$$
$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}=\mathbf{x}_t+(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\Delta t/2 \tag{11}$$

とするのが簡便である．さらにこの考えを$(\Delta t)^4$ の項まで推し進めたのが **Runge-Kutta** 法で，次のように求められる,

$$\mathbf{k}_1=\mathbf{f}(\mathbf{x}_t,t)$$
$$\mathbf{k}_2=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_t+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_1,t+\frac{\Delta t}{2}\right)$$
$$\mathbf{k}_3=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_t+\frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_2,t+\frac{\Delta t}{2}\right)$$
$$\mathbf{k}_4=\mathbf{f}(\mathbf{x}_t+\mathbf{k}_3\Delta t,t+\Delta t)$$
$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}=\mathbf{x}_\mathrm{t}+\frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1+2\mathbf{k}_2+2\mathbf{k}_3+\boldsymbol{k}_4) \tag{12}$$

となる.

[演習問題 5]

式(5)を食糧制限付き人口増加率 $A(N_t)$で、修正 Euler 法(式 11),Runge-Kutta 法(式 12)で解け．計算間隔は 1, 0.5, 0.25, 0.125 年とする．また，50 年後の人口差から誤差を見積もれ．計算間隔と人口差分はシート上で両対数をとり，散布図にプロットすると，傾斜が指数依存性になる．計算間隔の約 2, 4 乗に比例していることを導け.

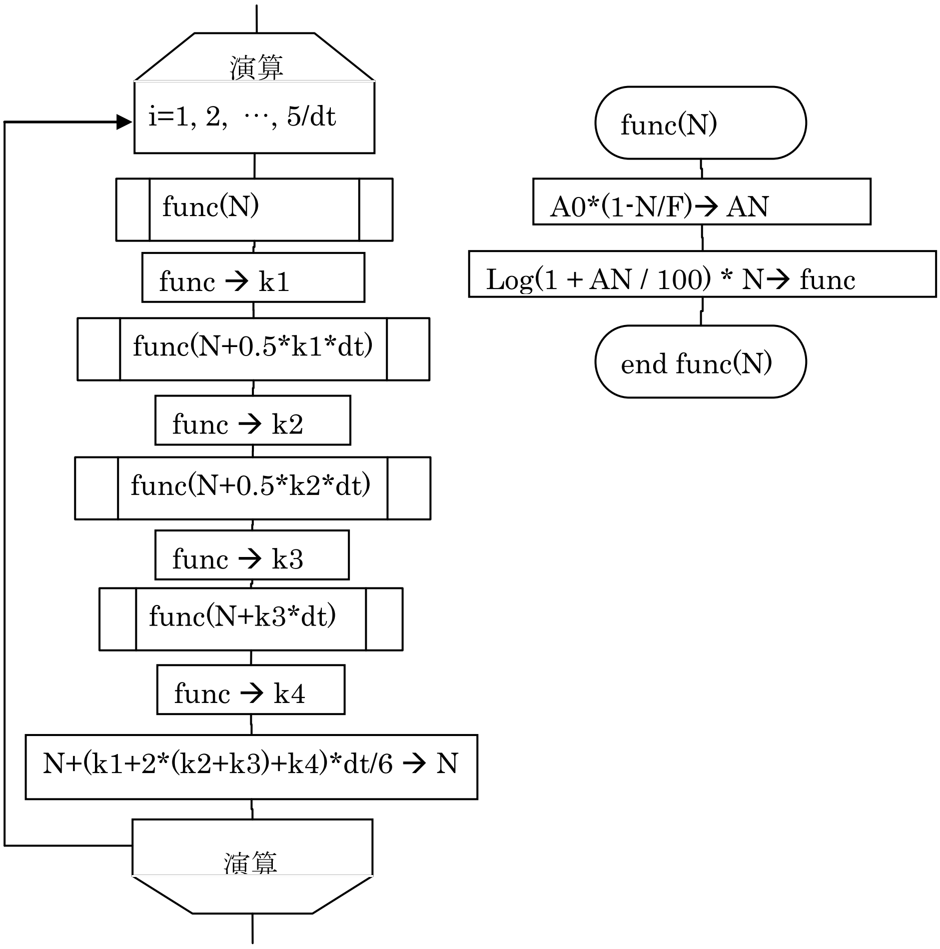

図 6 Runge-Kutta 法への拡張

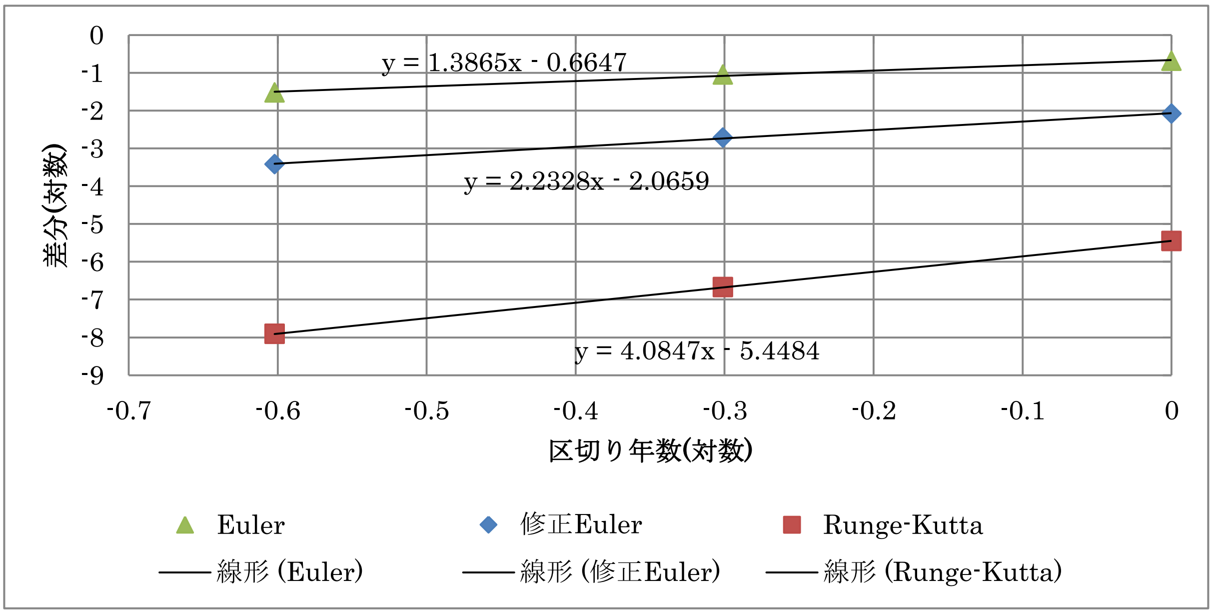

図 7 各計算法と誤差の時間区切り依存性

Lotka-Volterra 方程式

自然に生きる個体にとって，食糧もまた他の生物であり,被食生物も増加や減衰をする．そして，被食生物が減衰すれば，捕食生物も減衰する．被食・捕食の生態学的方程式として有名な Lotka-Volterra **方程式**を解いてみる．被食者数を x,捕食者 y とすると，

$$\frac{dx}{dt} = x(A - By) \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-C + Dx) \tag{14}$$

が Lotka-Volterra 方程式である．この定数 A,B,C,D の意味は,

- A: 被食者増加率(植物のように安定して増加するものを想定)
- B: 捕食率(xy は被食者と捕食者の遭遇確率に比例する)
- C: 捕食者死亡率(動物のように寿命が想定されている)
- D: 捕食者増加率(捕食しないと増えないとされる)

の意味をもつ.

この方程式は解析的に解けなくはないが，非線形なのでやや難解である．しかし周回軌道を描くことが知られており，保存量 V:

$$V = Dx + By - C\log_e x - A\log_e y \tag{15}$$

があるために，永久に振動しながら安定するという性質がある．モデルに保存量が存在することはよくあり，このような振動などの動きを見せながらも安定する系では，誤差の評価基準として使うことができる．今回は Euler 法と Runge-Kutta 法の両方を使い，保存量による誤差の評価や数値計算誤差が及ぼすシミュレーションへの影響を確認する.

[演習問題 6]

Euler 法と Runge-Kutta 法で，式(13),(14)を解き Lotka-Volterra 方程式の特徴と，誤差が招く結果の不一致を確かめる．dt=1.0/64 を共に使用し，A=8.0,B=3.0,C=6.0,d=1.0 とする．結果は t=1.0/32 単位で出し，t=3.00 まではとる.

(1) 次の初期値を採用する.
  (ア) (x,y)=(6,2.6)
  (イ) (x,y)=(5,2)
  (ウ) (x,y)= (1,1)

(2) グラフは散布図点のみで 3 種つくる
  (ア) 横軸が時間 t,縦軸が x,y　のもの
  (イ) 横軸が時間 t,縦軸が V　のもの
  (ウ) 横軸が x,縦軸が y のもの

(3) dt=1.0/32 にしてみる．特に初期値(ウ),グラフ(ウ)の挙動に注目せよ.

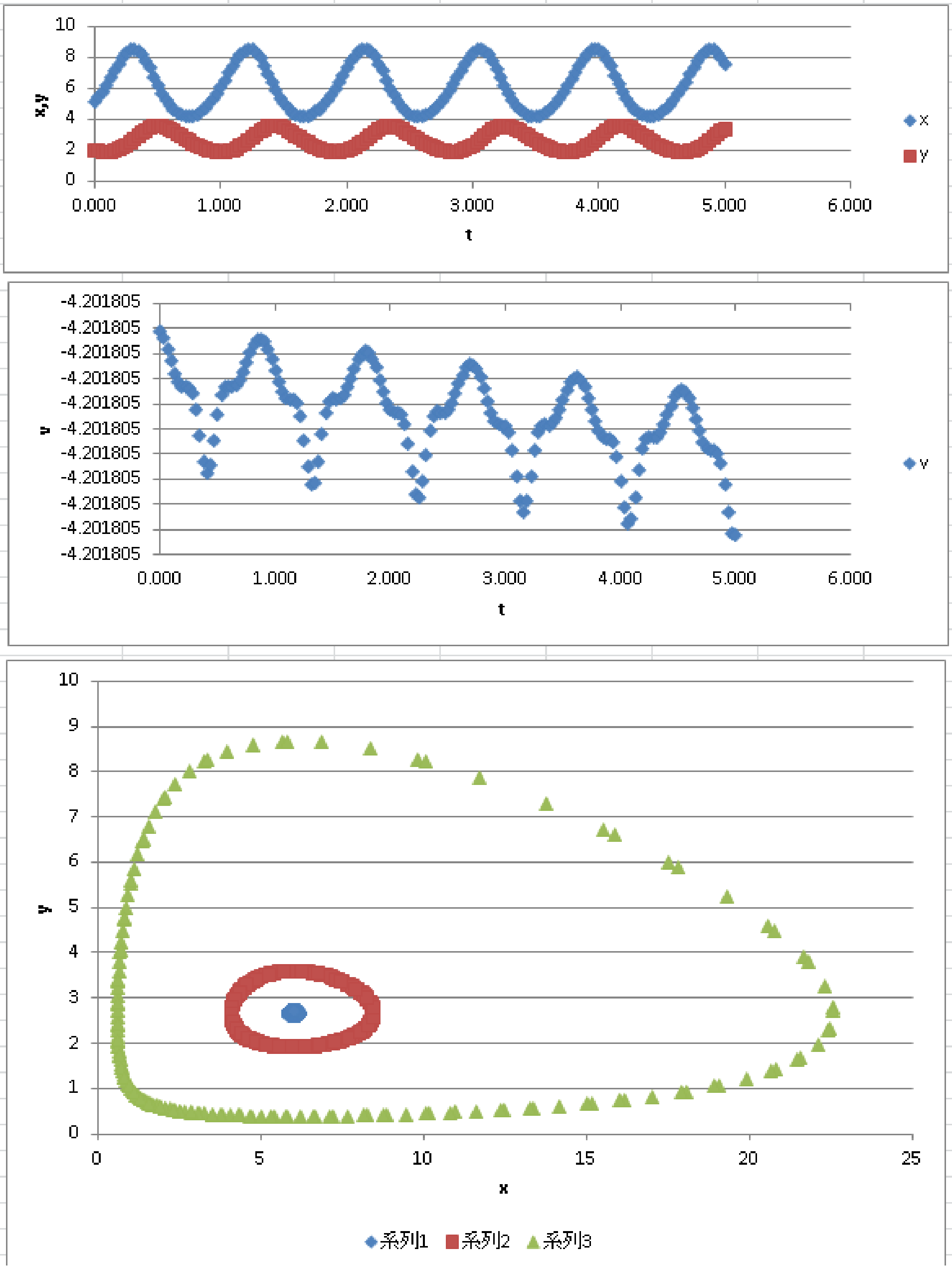

図 8 Lotka-Volterra を Runge-Kutta 法で解いたもの

[演習問題 8] x を植物．y を草食動物, z を肉食動物として，Lotka-Voltera 方程式を 3 変数系にして，解いてみる．

$$\frac{dx}{dt} = x(A - By) \tag{16}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-C + Dx - Ez) \tag{17}$$

$$\frac{dz}{dt} = z(-F + Gy) \tag{18}$$

A=6,B=3,C=3,D=1,E=3,F=2,G=1 で,(x,y,z)=(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), dt=1/128 くらいでおこなう．保存量

は AG=BF の時だけ存在し,

$$V_1 = DGx + BGy + BEz - CG\log x - AG\log y$$
$$V_2 = DGx + BGy + BEz + BC\log z - BF\log y \quad (19)$$

の 2 つである．出力は

- t 対 x,y,z(縦軸は対数の方が分かりやすい)
- t 対 V_1 か V_2
- x 対 y と y 対 z 相空間図とする．

参考書など

1. **三井 武友，小林 俊幸「微分方程式の解法」(工系数学講座 9)，共立出版, 2000.**
2. **神足 史人 (著) 「Excel で操る! ここまでできる科学技術計算」，丸善, 2009.**
3. **W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, “Numerical recipes : the art of scientific computing” (3rd ed.), Cambridge : Cambridge University Press, 2007.**
4. **奥村晴彦，佐藤俊郎，小林誠 （訳）「ニューメリカルレシピ・イン・シー ：C 言語による数値計算のレシピ」， 技術評論社, 1993.**